Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
– Physik –

Prof. Dr. A. Klümper
M. Brockmann
(G-16.04, 439-2541, michael.brockmann@physik.uni-wuppertal.de)

Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie
Sommersemester 2009

9. Übungsblatt

Abgabe bis zum 03.07.2009 um 14:00 Uhr ins Postfach
Besprechung am 06.07.2008 in der Übung

23. **Koordinatentransformation und Invarianz von Bewegungsgleichungen (9 Punkte)**

(a) Zeige, dass die Wellengleichung

$$(\partial_x^2 - \partial_{ct}^2) f(x,t) = 0$$

nicht invariant unter der Gallileitransformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

ist. Welche zusätzlichen Terme treten in der transformierten Gleichung auf? Was bedeutet das für die Elektrodynamik?

(b) Es sei D eine Orthogonalmatrix mit Matrixelementen D_{ij} (dann ist definitionsgemäß $D_{ij}D_{ik} = \delta_{jk}$ (Summenkonvention!)). D erzeugt eine Koordinatentransformation $x_i' = D_{ij}x_j$. Zeige, dass die Maxwellschen Geleichungen invariant unter dieser Transformation sind!
Hinweis: Zeige zunächst, dass $\varepsilon_{lmn}D_{il}D_{jm}D_{kn} = \varepsilon_{ijk}$ ist!

(c) Es sei nun $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ und $x^3 = z$. Ferner sei

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \alpha = \beta = 1,2,3 \\ -1 & \alpha = \beta = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir wollen eine allgemeine Transformation der Form $(x^0, x^1, x^2, x^3) \to (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ betrachten. Die Transformation sei nicht singulär (zweimal stetig differenzierbar und überall invertierbar) und erfülle die Gleichung

$$\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}.$$

Zeige, dass die Transformation dann notwendig affin, d.h. von der Form

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha$$

mit Koordinatenunabhängigen $\Lambda^\alpha{}_\beta$ und a^α ist!

24. **Elektromagnetisches Feld einer bewegten Punktladung (9 Punkte)**

Eine Punktladung q bewege sich längs einer Bahnkurve $\vec{x}_0(t)$. Ausgehend von den Liénard-Wiechert-Potentialen

$$\begin{pmatrix} \varphi(\vec{x},t) \\ \vec{A}(\vec{x},t) \end{pmatrix} = \frac{q}{r_0(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}.$$

soll nun das $\vec{E}$-Feld berechnet werden: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}/c$.

(a) Seien

$$\vec{r}_0 = \vec{x} - \vec{x}_0(t_0), \quad r_0 = |\vec{r}_0|, \quad \vec{n} = \vec{r}_0/r_0, \quad \vec{v} = \dot{\vec{x}}_0(t_0), \quad \vec{\beta} = \vec{v}/c, \quad \beta = |\vec{\beta}|$$

und t_0 die durch $t_0 = t - r_0/c$ implizit bestimmte retardierte Zeit. Zeige, dass folgende Relationen erfüllt sind:

$$\vec{\nabla} r_0 = -c\vec{\nabla} t_0, \quad \vec{\nabla}(\vec{r}_0\cdot\vec{v}) = \vec{v} - v^2\vec{\nabla} t_0, \quad \dot{r}_0 = c(1-\dot{t}_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = -\vec{v}\dot{t}_0$$
$$c\vec{\nabla} t_0 = -\frac{\vec{n}}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}, \quad \dot{t}_0 = \frac{1}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}.$$

(b) Zeige, dass sich für konstante Geschwindigkeiten, d.h. $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x}_0(t) = \text{konst.}$, folgende Formel ergibt:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{q(1-\beta^2)}{r_0^2}\,\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}. \tag{1}$$

(c) Berechne nun das $\vec{E}$-Feld für den Fall beschleunigter Bewegung, d.h. $\frac{d}{dt}\vec{v} \neq 0$. Zeige, dass der Term in Formel (1) um den Term

$$\frac{q}{cr_0}\,\frac{\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}$$

ergänzt werden muss. Welcher Term dominiert im Fernfeld?