Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
– Physik –

Prof. Dr. A. Klümper
M. Brockmann
(G-16.04, 439-2541, michael.brockmann@physik.uni-wuppertal.de)

Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie
SoSe 2009

5. Übungsblatt
Abgabe bis zum 22.05.2009 um 20:00 Uhr ins Postfach
Besprechung am 25.05.2009 in der Übung

12. **Selbstenergie (6 Punkte)**

Die Energie von N wechselwirkenden Punktladungen q_i bei $\vec{x}_i$, $i = 1, \ldots, N$ ist gegeben durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{1}$$

Nach Übergang zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung lässt sich die Energie auch über das von den Ladungen erzeugte Feld berechnen (siehe Vorlesung):

$$\tilde{U} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}^2(\vec{x}) d^3x. \tag{2}$$

(a) Der Gedanke, die letzte Formel wieder auf ein System von Punktladungen anzuwenden, liegt nahe. Es zeigt sich jedoch schon für eine einzelne Punktladung, dass das Ergebnis nicht mehr mit dem aus der ursprünglichen Formel gewonnenen übereinstimmt. Es ist $U = 0 \neq \tilde{U}$. Hier soll die Bedeutung dieses Unterschieds untersucht werden. Berechne dazu zunächst die Energie $\tilde{U}(R)$ des Feldes einer homogen geladenen Kugel ($\neq$ homogen geladene Kugelschale!) vom Radius R und betrachte sodann den Grenzfall $R \to 0$.

(b) Welcher Elektronenradius R ergibt sich, wenn man $\tilde{U}(R)$ gleich der Ruheenergie mc^2 des Elektrons setzt?

(c) Die divergierende Energie der Punktladungen wird *Selbstenergie* genannt. Subtrahiere in geeigneter Weise die Selbstenergie von der Energie $\tilde{U}$ eines Systems zweier Punktladungen und vergleiche das Ergebnis mit dem entsprechenden Wert von U.

13. **Stromdurchflossener Leiter (6 Punkte)**

Bestimme die magnetische Induktion $\vec{B}$ eines unendlich langen, geraden Leiters, der von einem zeitlich konstanten Strom I in Längsrichtung durchflossen wird.

(a) Bestimme hierzu zunächst unter Zuhilfenahme von Symmetriebetrachtungen die magnetische Induktion $\vec{B}$ mit dem Durchflutungsgesetz (integrierte Maxwellsche Gleichung). Für diesen Aufgabenteil habe der Leiter einen kreisförmigen Querschnitt mit Radius R bei homogener Stromdichte. Betrachte die beiden Fälle innerhalb und außerhalb des Leiters.

(b) Der Querschnitt des Leiters sei nun vernachlässigbar klein. Bestimme die Induktion $\vec{B}$ nach Biot-Savart. Wie lautet das zugehörige Vektorpotential?

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{I}{c} \int\limits_{\text{Leiter}} \frac{(\vec{r} - \vec{\ell}) \times d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{\ell}|^3} \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r' = \frac{I}{c} \int\limits_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{\ell}|} \tag{3}$$

14. **Rotierende Kugelschale (6 Punkte)**

Auf einer Kugelschale vernachlässigbarer Dicke mit Radius R sei die Ladung Q gleichmäßig verteilt. Es soll im Folgenden das Magnetfeld im Innen- und Außenbereich bestimmt werden, wenn die Kugelschale um eine feste Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert.

(a) Zeige, dass mit der Integralformel für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ aus der vorherigen Aufgabe folgt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{QR^2}{3c}\frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{r^3} \quad r > R \qquad\qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{Q}{3Rc}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad r < R. \tag{4}$$

Lege das Koordinatensystem bei der Integration so, dass $\vec{r}$ auf der z-Achse liegt ($\vec{\omega}$ ist hierbei beliebig orientiert).

(b) Bestimme die Induktion für den Innen- und Außenbereich durch Bildung der Rotation.

(c) Welche Beziehungen für die Normal- und Tangentialkomponenten von $\vec{B}$ gelten beim Übergang vom Innen- zum Außenbereich? Skizziere den Feldlinienverlauf.