Rechenmethoden I

Übung 8

gestellt am 8.12.2009, Abgabe: 11.12.2009(Nuding), 15.12.2009(Schulz)

Übungsleiter:

Win Nuding	G.16-04, nuding@physik.uni-wuppertal.de
Ferdinand Schulz	D.09-22, Ferdinand.Schulz@math.uni-wuppertal.de

Aufgabe 1: Schwerpunkte — 9 Punkte

Der Schwerpunkt eines Körpers ist gegeben durch

$$\vec{s} = \frac{1}{G} \int_V \rho(x)\vec{x}\, dx$$

wobei

$$G = \int_V \rho(x)\, dx$$

das Gewicht des Körpers ist und $\rho(x)$ die Dichte.

Sei nun die Dichte $\rho(x) \equiv \rho$ konstant. Berechne dann den Schwerpunkt der folgenden Körper. Wähle dazu geeignete Koordinaten und sage, wo der Ursprung des Koordinatensystems hingelegt worden ist.

a) Halbkugel, die im positiven Halbraum liegt und deren Schnittfläche mit der xy-Ebene übereinstimmt.

b) Stehender Zylinder, der längs der Mittelachse halbiert ist.

c) Rotationsparaboloid (Der Körper, der entsteht, wenn man die Normalparabel um die y-Achse dreht.) der Höhe h, der auf seiner Grundfläche steht mit der „Spitze“ nach oben.

Aufgabe 2: Trägheitsmomente — 7 Punkte

Das Trägheitsmoment ist gegeben durch das folgende Integral:

$$\int_V \rho(\vec{x}) r_\perp^2\, dV,$$

wobei $\rho(x)$ die Dichte ist und $r_\perp$ der senkrechte Abstand zur Rotationsachse. (Das Trägheismoment spielt eine wichtige Rolle bei der Berechnung von Energie und Drehimpuls von rotierenden Körpern.) In dieser Aufgabe gehen wir davon aus, dass die Dicht konstant ist mit $\rho = m/V$, wobei m die Masse und V das Volumen des betrachteten Körpers ist. Wähle für die Rechnung geeignete Koordinaten.

a) Berechne das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit dem inneren Radius r_1 und dem äußeren Radius r_2, der um seine Symmetrieachse rotiert. Was ist dann das Trägheitsmoment eines Vollzylinders der sich um seine Symmetrieachse dreht?

b) Berechne das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius R, der um eine Achse rotiert, die senkrecht zur Symmetrieachse steht, und durch seinen Schwerpunkt geht.
Tipp: Integrale vom Typ $\int \sqrt{1-y^2}\, dy$ kann man lösen mit der Substitution $y = \sin(t)$.

Aufgabe 3 : Gammafunktion

6 Punkte

Die Gammafunktion ist unter anderem ein wichtiges Hilfsmittel, wenn es um die Berechnung von Integralen geht in denen Produkte Polynomen und Faktoren der Form e^{-x^2} vorkommen (häufig z.B. in der Quantenmechanik). Die Gammafunktion ist gegeben durch das folgende Integral :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\, dt$$

a) Berechne $\Gamma(1)$ und $\Gamma(1/2)$

b) Zeige $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Was ist $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$?

c) Zeige

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

d) Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, dx$$

mit Hilfe der Gammafunktion.