

Rechenmethoden I

Übung 7

gestellt am 1.12.2009, Abgabe: 4.12.2009(Nuding), 8.12.2009(Schulz)

Übungsleiter:

Win Nuding G.16-04, nuding@physik.uni-wuppertal.de

Ferdinand Schulz D.09-22, Ferdinand.Schulz@math.uni-wuppertal.de

Aufgabe 1: Integrale mit trigonometrischen Funktionen

10 Punkte

Jedes Integral vom Typ $\int p(x)/q(x) dx$, p, q Polynome, lässt sich mit Hilfe von Partialbruchzerlegung lösen. Ein Integral über Brüche aus trigonometrischen Funktionen lässt sich immer auf den ersten Typ zurückführen durch die Substitution

$$t = \tan(x/2).$$

a) Rechne nach, dass gilt

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Tipp: Um auf $\sin(x/2)$ bzw $\cos(x/2)$ zu kommen, wende auf $\sin(x/2 + x/2)$ bzw $\cos(x/2 + x/2)$ die Additionstheoreme an. Außerdem ist nützlich sich zu überlegen, dass $\cos^2(x) = 1/(1 + \tan^2(x))$ gilt (muss aber nachgerechnet werden).

b) Berechne das Integral

$$I := \int \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)} dx.$$

Aufgabe 2: Wegintegrale und Reibung

4 Punkte

Kraft längs eines Weges integriert liefert die Arbeit, die nötig ist um einen Körper, der diese Kraft erfährt längs des Weges zu bewegen. Reibungskräfte können dabei rein geschwindigkeitsabhängig sein. Die Reibungskraft sein nun gegeben durch $\vec{F} = -\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$. Der Körper soll in der Ebene von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ bewegt werden.

a) Berechne die Arbeit für die direkte Verbindung $r_1(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$ und den Weg längs der Normalparabel $r_2(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

b) Betrachte nun die gleichen Wege aber bei doppelter Geschwindigkeit, d.h. $\tilde{r}_1(t) = 2(t, t)$, $t \in [0, 1/2]$ und $\tilde{r}_2(t) = (2t, (2t)^2)$, $t \in [0, 1/2]$. Ist das Ergebnis anders als in a)? Wenn ja, warum?

Aufgabe 3: Volumenberechnungen

6 Punkte

Verwende geeignete Koordinaten um die folgenden Volumina zu berechnen

- a) Pyramide der Höhe h mit rechteckiger einer Grundfläche mit den Kantenlängen a und b .
- b) Kegel der Höhe h mit Grundfläche vom Radius R
- c) *Zusatzaufgabe, 3 Sonderpunkte:*
Kegelförmiges Objekt der Höhe h mit beliebig geformter Grundfläche mit dem Flächeninhalt A .
- d) Das Volumen der Erdkruste zwischen den tropischen Wendekreisen. (Erdradius: 6370 km; mittlere Dicke der Erdkruste: ca 40 km; tropische Wendekreise: ca 23° nördlicher bzw. südlicher Breite.)