Rechenmethoden I

Übung 2

gestellt am 27.10.2009, Abgabe: 30.10.2009

Übungsleiter:
Win Nuding G.16-04, nuding@physik.uni-wuppertal.de
Ferdinand Schulz D.09-22, Ferdinand.Schulz@math.uni-wuppertal.de

Aufgabe 1: Rechenregeln fürs Kreuzprodukt 5 Punkte

Zeige folgende Rechenregeln für das Kreuzprodukt (wenn dies nicht möglich ist, auf jeden Fall in den weiteren Aufgaben benutzen)

a) Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ gilt: $\vec{a}$ ist parallel zu $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

b) Es gilt das Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

c) Es gilt die „bac-cap“ - Regel: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

d) Zeige mit Hilfe von c):

(i) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

(ii) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

Aufgabe 2: Spat 4 Punkte

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die nicht in einer Ebene liegen, spannen einen Spat (oder Parallelepiped) auf.

a) Wie erhält man das Volumen des Spates? (Antwort mit Begründung!)

b) Berechne das Spatvolumen für $\vec{a} = (1, -2, 0)$, $\vec{b} = (3, 1, 1)$ und $\vec{c} = (1, -4, 2)$

Aufgabe 3: Gemischtes 7 Punkte

a) Wie muss λ gewählt werden, damit die drei Vektoren $\vec{a} = (1, \lambda, 4)$, $\vec{b} = (-2, 4, -11)$ und $\vec{c} = (-3, 5, 1)$ in einer Ebene liegen?

b) Bestimme für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Zerlegung $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$ mit $\vec{a}_\parallel \parallel \vec{b}$ und $\vec{a}_\perp \perp \vec{b}$.

c) Zeige, dass gilt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\varphi),$$

wobei φ der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist.
Tipp: 1 d) (i)

Aufgabe 4 : Matrizen 5 Punkte

a) In der Vorlesung wurde gesagt, dass lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ immer durch Matrizen ausgedrückt werden können. Die Funktion $f(\vec{v}) := \vec{a} \times \vec{v}$ mit $\vec{a} = (1,2,3)$ ist offenbar linear. Finde die Matrix A für die gilt $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ bezüglich der Standardbasis.

b) Die Spur einer $n \times n$ Matrix A ist definiert als die Summe ihrer Diagonaleinträge, also

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

Zeige nun für zwei $n \times n$ Matrizen A und B, dass gilt :

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$$