# Rechenmethoden I

## Übung 12

gestellt am 19.1.2010, Abgabe: 22.1.2010(Nuding), 26.1.2010(Schulz)

Übungsleiter:

| | |
|---|---|
| Win Nuding | G.16-04, nuding@physik.uni-wuppertal.de |
| Ferdinand Schulz | D.09-22, fschulz@physik.uni-wuppertal.de |


**Die mit * gekennzeichneten Aufgabenteile sind Zusatzaufgaben.**

### Aufgabe 1: Lineare Differentialgleichungen — 7 Punkte

Löse die folgenden linearen Differentialgleichungen. Natürlich darf verwendet werden, was von Aufgabenblatt 10 schon über lineare Differentialgleichungen bekannt ist.

a)

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}, \qquad y(1) = 0$$

b)

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - 2x^2 = 0, \qquad y(1) = 2$$

c)* *(5 Sonderpunkte)*

$$\dot{u}(t) + u(t)\frac{2}{1+t} = \frac{2t}{1+t}, \qquad u(0) = 1$$

### Aufgabe 2: Trennung der Variablen und Verwandtes — 10 Punkte

DGLs, die man mittels *Trennung der Variablen* lösen kann, haben die folgende Form:

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))} \Leftrightarrow g(y(x))y'(x) = f(x)$$

Integration über $x$ liefert

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C,$$

dabei wurde auf der linken Seite die Substitutionsformel verwendet.
Löse die folgenden Differentialgleichungen:

a)

$$y'(x) = \frac{1}{x}\,\frac{-4y^2(x) + 6y(x) - 7}{4y(x) - 3}$$

b)

$$y'(x) = \frac{3y(x) - 7x}{4y(x) - 3x}$$

*Tipp:* Verwende die Transformation $\hat{y}(x) := y(x)/x$.

*Bemerkung:* Diese Transformation hilft bei allen DGLs vom Typ $y' = P(x,y)/Q(x,y)$ wenn gilt $P(kx,ky) = k^n P(x,y)$ und $Q(kx,ky) = k^n Q(x,y)$, d.h. wenn $P$ und $Q$ beide homogen vom Grad $n$ sind.

c)

$$y'(x)x = y(x) - x - x\mathrm{e}^{-y/x}, \qquad y(1) = 0$$

*Tipp:* Siehe Tipp und Bemerkung in der vorigen Teilaufgabe.

## Aufgabe 3: Fingerübungen zu komplexen Zahlen — 3 Punkte

Zerlege die folgenden Ausdrücke in Real- und Imaginärteil

a) $\dfrac{i-1}{i+1}$

b) $\dfrac{3+4i}{1-2i}$

c) $i^n$

## Aufgabe 4: Polardarstellung komplexer Zahlen — 3 Punkte

Es gilt die Formel

$$\mathrm{e}^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

Identifiziert man nun die Imaginäre Achse mit der y-Achse im $\mathbb{R}^2$, dann ist leicht einsichtig, dass es eine Polardarstellung von komplexen Zahlen gibt von der Form

$$z = |z|\mathrm{e}^{i\varphi}$$

wobei $\varphi$ der Winkel ist, den man von den 2-dim Polarkoordinaten kennt.
Benutze diese Polardarstellung nun, um Wurzeln aus komplexen Zahlen zu ziehen. Allgemein hat $\sqrt[n]{z}$ immer $n$ Wurzeln.
Finde mit Hilfe der Polardarstellung jeweils alle folgenden Wurzen (d.h. $n$ Lösungen für die $n$-te Wurzel)
*Tipp:* Um mehrere Wurzeln zu erhalten, bedenke, dass $\mathrm{e}^{\varphi} = \mathrm{e}^{\varphi + n2\pi i}$, $n \in \mathbb{N}$. Außerdem ist es geschickt, sowohl $z$ wie auch die gesuchten Wurzeln in Polarkoordinaten zu betrachten.

a) $\sqrt{i}$

b) $\sqrt{1+i}$

c) $\sqrt[3]{27}$

d)* $\sqrt[n]{z}$ *(2 Sonderpunkte)*