Rechenmethoden I

Übung 11

gestellt am 12.01.2010, Abgabe: 15.12.2009(Nuding), 19.12.2009(Schulz)

Übungsleiter:
Win Nuding G.16-04, nuding@physik.uni-wuppertal.de
Ferdinand Schulz D.09-22, fschulz@physik.uni-wuppertal.de

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator 8 Punkte

Wir betrachten eine Metallkugel der Masse m, die an einer Feder mit der Federkonstanten k befestigt ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich die Metallkugel am Punkt $x = 0$ und habe die Geschwindigkeit v_0. Stelle die Differentialgleichung auf, die die Bewegung der Metallkugel beschreibt, und löse sie.

Aufgabe 2: Gauss-Satz 8 Punkte

Wende den Satz von Gauß auf das Vektorfeld $\vec{F}$ an, um den Fluss durch einen Würfel der Kantenlänge 1 und den Eckpunkten (0,0,0), (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) zu berechnen :

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \exp(x)z - y^4 \\ y^2\cos(x) \\ zy^3 + x^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Stokes-Theorem 8 Punkte

Überprüfe den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\vec{F}$ und den Kreis in der $x - y-$Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und Radius 1:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} |\vec{x}|^2 \\ -|\vec{x}|^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Das Oberflächenintegral O eines Vektorfeldes $\vec{F}$ zu einer Fläche A im dreidimensionalen Raum definiert man mathematisch präzise, indem man von einer Parametrisierung $\vec{A}(t_1, t_2) : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \to \mathbb{R}^3$ von A ausgeht. Das Oberflächenintegral ist dann

$$O = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \vec{F}(A(t_1,t_2)) \cdot (\partial\vec{A}/\partial t_1 \times \partial\vec{A}/\partial t_2)\, dt_1 dt_2$$

Aufgabe 4: Integrale 6 Punkte

Ermittle die unbestimmten Integrale zu den folgenden Funktionen:

a.) $\frac{4x-6}{2x^2-6x+8}$ b.) $\sin(x)^4\cos(x)$ c.) $e^x x$