Rechenmethoden I

Übung 10

gestellt am 17.12.2009, Abgabe: 8.1.2010(Nuding), 12.1.2010(Schulz)

Übungsleiter:
Win Nuding G.16-04, nuding@physik.uni-wuppertal.de
Ferdinand Schulz D.09-22, fschulz@physik.uni-wuppertal.de

Der folgende Aufgabenzettel hat einen fast doppelt so großen Umfang wie üblich. Damit möchten wird die Gelegenheit bieten, den Punktestand aufzubessern.

Aufgabe 1: Der schiefe Wurf als Differentialgleichung 4 Punkte

Von einem fahrenden Zug (Geschwindigkeit v_z) wird ein Stein gegen die Fahrtrichtung abgeworfen mit der Geschwindigkeit v_w relativ zum Zug. Berechne die Flugkurve $s(t)$. Stelle dazu die DGL auf und löse sie durch Integrieren. (Zur Erinnerung: $v(t) = \dot{s}(t)$ und $a(t) = \ddot{s}(t)$)

Aufgabe 2: Integration einfacher Differentialgleichungen 9 Punkte

Viele Differentialgleichungen kann man durch Integration lösen, wenn man sie so umformt, dass man integrieren kann. Löse die folgenden Differentialgleichungen durch Integration.

Beispiel:

$$y'(x) = y(x) \;\&\; y(0) = A \qquad \Rightarrow \int_0^t \underbrace{y'(x)/y(x)}_{=\ln(y(x))'} dx = t \qquad \Rightarrow y(t) = A\,\mathrm{e}^t$$

a)

$$y'(x) = \frac{\cos(\omega x)}{\sin(\omega x)}, \qquad y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = A$$

b)

$$y'(x) = ax\,y(x) + b\,y(x), \qquad y(0) = B$$

c)

$$y'(x) = 1/y(x) + y(x), \qquad y(0) = 0$$

Tipp: Bringe die Gleichung auf die Form $1 = \ldots$. Integiert man die Gleichung von 0 nach t so kann man nach der gesuchten Funktion $y(t)$ auflösen.

Aufgabe 3: Lineare Differentialgleichungen 10 Punkte

Betrachte eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \tag{1}$$

Ihre allgemeine Lösung ist die Summe aus der allgemeinen homogenen Lösung, d.h. der Lösung von $y'(x) = a(x)y(x)$, und einer speziellen (partikulären) Lösung von (1). Im Folgenden soll eine partikuläre Lösung mit der Methode der *Variation der Konstanten* gefunden werden.

a) Sei $\varphi(x)$ die Lösung der homogenen DGL $y'(x) = a(x)y(x)$. Berechne $\varphi(x)$ durch Integration wie in Aufgabe 2.
Tipp : Es bleibt ein Integral, das man nur lösen kann, wenn man $a(x)$ kennt.

b) Um die Lösung von (1) zu finden, mache den Ansatz $\psi(x) = \varphi(x)u(x)$. Finde eine DGL für $u(x)$ und löse sie
Tipp : Es bleibt ein Integral, das man nur lösen kann, wenn man $b(x)$ und $\varphi(x)$ kennt. Benutze, dass $\varphi(x)$ die homogene DGL (siehe a)) löst.

c) Löse die DGL

$$y'(x) = 2x\, y(x) + x^3$$

(i) Finde dabei die partikuläre Lösung durch Anwendung von a) und b).
(ii) Rate die Partikuläre Lösung. Nehme dazu an, dass die partikuläre Lösung ein Polynom ist. Überlege, welchen Grad das Polynom nur haben kann und bestimme dann durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten des Polynoms.

Bonusaufgabe 4* : Differentialgleichungen höherer Ordnung — 9 Punkte

Sei

$$D_t = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \tag{2}$$

ein Differentialoperator n-ter Ordnung. Betrachte nun die sogenannte homogene DGL n-ter Ordnung

$$D_t\, f(t) = 0 \qquad \left(\text{d.h.} \quad a_n \frac{d^n}{dt^n} f(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} f(t) + a_0 f(t) = 0\right) \tag{3}$$

a) Warum bilden die Lösungen dieser DGL einen Vektorraum?

b) Für gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung gibt es einen Eindeutigkeitssatz, der besagt, dass Lösungsfunktionen, die an einem Punkt gleich sind auch im Ganzen gleich sind. Wenn man also die allgemeinste Lösung rät und zeigt, dass sie die DGL löst, weiß man, dass die DGL vollständig gelöst ist. Die Lösung einer DGL n. Ordnung ist eindeutig bei Vorgabe der Anfangswerte für die Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur $(n-1)$. Ordnung.

Die DGL (3) wird durch den Ansatz $\varphi(t) = A\exp(\alpha t)$ in eine Nullstellengleichung für ein Polynom vom Grad n überführt : $p(\alpha) = a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$

Warum hat der Lösungsraum mindestens die Dimension k, wenn $p(\alpha)$ k Nullstellen hat?

Bemerkung : Man kann zeigen, dass der Lösungsraum die Dimension n hat. Das bedeutet dann, dass die allgemeine Lösung n freie Parameter hat.

c) Die DGL $y''(x) = a^2y(x)$ hat offenbar die Lösungen $\psi_1(x) = A_1\exp(ax) + B_1\exp(-ax)$ und auch $\psi_2(x) = A_2\sinh(ax) + B_2\cosh(ax)$ und $\psi_3(x) = A_3\sinh(ax + B_3)$ und $\psi_4(x) = A_4\cosh(ax + B_4)$. Zeige, dass das kein Widerspruch zum Eindeutigkeitssatz ist.