Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
– Physik –

Prof. Dr. A. Klümper
Y. Öz (822066@uni-wuppertal.de)
D. Nawrath (D.09.01, 439-2617, dnawrath@uni-wuppertal.de)

# Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie
# SoSe 2012

## 9. Übungsblatt

Abgabe 21.06.2012 im Tutorium
Besprechung am 22.06.2012 in der Übung

33. **Strahlung eines Teilchens auf einer Kreisbahn (10 Punkte)**

Es soll die Winkelabhängigkeit der Strahlung eines Teilchens mit Ladung $q$ bestimmt werden, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 2\pi/T$ auf einer Kreisbahn mit Radius $r$ in der $xy$-Ebene bewegt.
Bestimme dazu zunächst die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}|^2}{\left(1 - \left\langle \vec{n}, \vec{\beta} \right\rangle\right)^5},$$

wobei $r \ll |\vec{x}|$ gelten und $\vec{x}$ in der $yz$-Ebene liegen soll. Mit diesen Vereinfachungen gilt $\cos(\angle(\vec{n}, \vec{\beta})) = \sin(\theta)\cos(\varphi)$ mit $\varphi = \omega_0 t$.
*Hinweis*: Was bedeuten die Näherungen für $\vec{n}$?
Bestimme damit die über eine Periode gemittelte Intensitätsverteilung

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{T} \frac{q^2}{4\pi c} \int_0^T dt' \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{T} \frac{q^2}{4\pi c} \int_0^T dt' \left( \frac{\dot{\beta}^2}{\left(1 - \left\langle \vec{n}, \vec{\beta} \right\rangle\right)^3} - \frac{(1-\beta^2) \left\langle \vec{n}, \dot{\vec{\beta}} \right\rangle^2}{\left(1 - \left\langle \vec{n}, \vec{\beta} \right\rangle\right)^5} \right)$$

*Hinweis*: Die abgestahlte Leistung lässt sich schreiben als

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c} (I_1 - I_2)$$

in Abhängigkeit von zwei Integralen $I_1$ und $I_2$, welche sich mit den Techniken der Funktionentheorie lösen lassen (4 Bonuspunkte). Alternativ dürfen diese mittels Computer-Algebra berechnet werden.

34. **Abgestrahlte Leistung eines beschleunigten Teilchens (6 Punkte)**

Ein geladenes Teilchen werde in einem konstanten elektrischen Feld $\vec{E}_0$ beschleunigt. Zeige, dass der Leistungsverlust durch Strahlung vernachlässigbar gegenüber dem Energiegewinn durch die Beschleunigung ist, wenn die Geschwindigkeit $\vec{v}$ parallel zum Feld $\vec{E}_0$ ist.

35. **Invarianz des Linienelements (4 Punkte)**

Wir wollen zeigen, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren invariant bezüglich zweier Inertialsysteme (gleichförmig bewegter Bezugssysteme) ist, d.h.

$$\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \ . \tag{1}$$

Dazu reicht es für beliebige $\boldsymbol{x}$

$$s^2(\boldsymbol{x}') = s^2(\boldsymbol{x}) := \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \tag{2}$$

zu zeigen. Bedenke, dass für lichtartige Teilchen $s^2(\boldsymbol{x}) = 0$, insbesondere $s^2(\boldsymbol{x}') = s^2(\boldsymbol{x})$, postuliert wird. Für raum- und zeitartige Vektoren $\boldsymbol{x}$ ist $s^2(\boldsymbol{x}') = s^2(\boldsymbol{x})$ zu zeigen.

(a) Benutze folgende Definition,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle' := \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle \ ,$$

und betrachte die Terme

$$\left\langle \boldsymbol{e}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j), \boldsymbol{e_0} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j) \right\rangle' \text{ und } \langle \boldsymbol{e}_0 \pm \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e_0} \pm \boldsymbol{e}_j \rangle'$$

lichtartiger Vektoren, wobei $\boldsymbol{e}_\alpha$ die kanonischen Einheitsvektoren sind. Leite daraus die Bedingung

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle' = \kappa \, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

her.

(b) Überlege, warum $\kappa^2 = 1$ gelten muss.