Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
– Physik –

Prof. Dr. A. Klümper
Y. Öz (822066@uni-wuppertal.de)
D. Nawrath (D.09.01, 439-2617, dnawrath@uni-wuppertal.de)

Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie
SoSe 2012

8. Übungsblatt
Abgabe 06.06.2012 im Tutorium
Besprechung am 08.06.2012 in der Übung

25. **Kraft zwischen zwei Dipolen (6 Punkte)**

Es werden starre Ladungsverteilungen betrachtet, die verschwindende Gesamtladung $q = 0$ und von null verschiedene Dipolmomente $\vec{p}$ besitzen ("neutrale Moleküle" oder ähnliches).

(a) Welche Energie hat eine Ladungswolke mit Dipolmoment $\vec{p}$ im elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{x})$ und welche Kraft und welches Drehmoment übt dieses auf die Ladungswolke aus? (Tipp: siehe Vorlesung).

(b) Welches Feld ruft ein elektrischer Dipol hervor?

(c) Bestimme mit Hilfe von (b) die Energie, Kraft und Drehmoment zwischen zwei Dipolen bei beliebigem Abstand und beliebiger geometrischer Anordnung.

(d) Wie müssen die Dipole im Raum orientiert sein, damit die Kraft zwischen ihnen verschwindet?

(e) Was ist die Energie, Kraft und Drehmoment zwischen zwei *magnetischen* Dipolen?

26. **Strahlungserzeugung/Multipolbeiträge (6 Punkte)**

In der Vorlesung wurde das Vektorpotential für eine zeitlich periodisch veränderliche Stromverteilung,

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega t} ,$$

bestimmt. Dieses lautet

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \, . \tag{1}$$

Wir wollen das Vektorpotential in der Fernzone (welche Relation gilt dann für k und $r := |\vec{x}|$?) anschauen. Nähere im Integranden die $|\vec{x}-\vec{x}'|$-Ausdrücke wie in der Vorlesung gezeigt. Vernachlässige Terme, die zu $\vec{A}(\vec{x})$ in Ordnung $O(1/r^2)$ beitragen. Dies führt genau zur Ersetzung von $|\vec{x}-\vec{x}'|$ im Nenner durch $|\vec{x}|$ und im Exponenten durch $|\vec{x}| - \vec{x}\vec{x}' / |\vec{x}|$ (wieso?). Damit erhält man (3.64) der Vorlesung.

Der Exponentialausdruck $\exp(-i\,k\,\vec{x}\vec{x}' / |\vec{x}|)$ kann entwickelt werden und liefert im Integral mit $\vec{j}(\vec{x}')$ gewisse Momente der Stromdichte. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß das 0. Moment der Stromdichte dem 1. Moment der Ladungsdichte, d.h. dem elektrischen Dipolmoment entspricht. Wie führt das 1. Moment der Stromdichte auf das elektrische Quadrupolmoment sowie das magnetische Dipolmoment?

27. **Sendeantenne (6 Punkte)**

In der Sendeantenne einer Fernsehanstalt herrsche die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \delta(x)\delta(y)\sin(k(\ell - z))\Theta(z)\Theta(\ell - z)\sin(\omega t)\vec{e}_z, \quad k = \omega/c. \tag{2}$$

Berechne in der Fernzone ($r = |\vec{x}| \gg \ell$, aber nicht unbedingt $\lambda = 2\pi/k \gg \ell$) das Vektorpotential $\vec{A}$ bis zu

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \ldots \int_0^\ell \ldots \sin(\omega t - kr + \ldots), \tag{3}$$

wobei im Argument des Sinus bereits Terme der Ordnung $k\ell^2/r$ weggelassen wurden. Betrachte nun die Strahlung am Erdboden (xy-Ebene). Dies vereinfacht $\vec{A}(\vec{x}, t)$ weiter, und man erhält leicht den führenden Term von $\vec{B}$ in der xy-Ebene. Für welche Länge ℓ der Sendeantenne wird die Intensität des Magnetfelds $\vec{B}$ (das zeitgemittelte Quadrat) maximal?

28. **Eine gleichförmig bewegte Ladung (6 Punkte)**

Das elektrische Feld einer gleichförmig mit Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegten Ladung q hat die Gestalt

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{\gamma}{[1 + (\gamma^2 - 1)\cos^2(\theta)]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{q\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \tag{4}$$

(Dieser Ausdruck wird demnächst aus den Liénard-Wiechert-Potentialen hergeleitet.) Dabei zeigt $\vec{x} := (x - vt, y, z)$ vom Ort $(vt, 0, 0)$ der Ladung zur Zeit t zum Aufpunkt (x, y, z) des Feldes. θ ist der Winkel, den $\vec{x}$ mit der x-Achse einschließt, und $\gamma^{-2} = 1 - (v/c)^2$.

Skizziere die Winkelabhängigkeit des elektrischen Feldes in der xy-Ebene für beispielsweise $\gamma^2 = 2$ und $t = 0$ bei konstantem Abstand vom Ursprung.

Berechne den Winkel α, der dadurch bestimmt ist, dass gerade die Hälfte des gesamten Flusses des elektrischen Feldes durch den von $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ bis $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ reichenden Teil einer momentan um die Ladung gelegten Kugeloberfläche geht. Was ergibt sich speziell für $\gamma \gg 1$?

Anmerkung: Der Winkel α ist ein Maß für die relativistische Abplattung des Feldes senkrecht zur Bewegungsrichtung.

29. **Maxwellscher Spannungstensor (6 Punkte)**

Zeige, dass unter Einführung des Maxwellschen Spannungstensors

$$T_{\alpha\beta} := \frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(E^2 + B^2\right)\right) \tag{5}$$

die Formel (3.81) aus der Vorlesung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{p}_{\text{mech}} + \frac{\vec{s}}{c^2}\right] = \frac{1}{4\pi}\Bigg[&\left(\nabla \cdot \vec{E}\right)\vec{E} + \left(\vec{E} \cdot \nabla\right)\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla\vec{E}^2 \\ &+ \left(\nabla \cdot \vec{B}\right)\vec{B} + \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{B} - \frac{1}{2}\nabla\vec{B}^2\Bigg]\end{aligned}$$

sich in

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{p}_{\text{mech}} + \frac{\vec{s}}{c^2}\right]_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\beta\alpha}$$

umschreiben lässt.