Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
– Physik –

Prof. Dr. A. Klümper
Y. Öz (822066@uni-wuppertal.de)
D. Nawrath (D.09.01, 439-2617, dnawrath@uni-wuppertal.de)

Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie
SoSe 2012

5. Übungsblatt
Abgabe 10.05.2012 vor der Vorlesung
Besprechung am 11.05.2012 in der Übung

16. **Linearer Quadrupol (6 Punkte)**

Drei Punktladungen seien linear angeordnet. Die Ladung der beiden Äußeren Punkte sei q, die des mittleren $-2q$. Der Abstand der äußeren Punkte zum mittleren sei jeweils a. Wie lautet das Potential $\phi(\vec{x})$ in einem Koordinatensystem, in dem die Ladungsverteilung auf der z-Achse symmetrisch um $z = 0$ liegt? Zeige, dass sich das Ergebnis für $r = |\vec{x}| > a$ durch r und den Winkel ϑ zwischen $\vec{x}$ und der z-Achse in der Form

$$\phi(\vec{x}) = \frac{2q}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos\vartheta) \tag{1}$$

mit geraden Polynomen P_{2l} ausdrücken lässt. Bestimme P_2 explizit. Wie lautet das Potential im Grenzfall $a \to 0$, $q \to \infty$ bei konstatem $Q = qa^2$?

17. **Streufeld (8 Punkte)**

Betrachte zwei unendlich in die linke xy-Halbebene ausgedehnte, homogen geladene Platten bei $z = \pm a$, $a > 0$. Die Flächenladungsdichte der beiden Platten sei konstant bis zum Rand hin und gleich σ auf der unteren und $-\sigma$ auf der oberen Platte.

(a) Zeige, dass sich das elektrostatische Potential in folgender Form schreiben lässt:

$$\phi(\vec{x}) = \sigma \int_x^{\infty} \ln\left(\frac{u^2 + (z-a)^2}{u^2 + (z+a)^2}\right) du. \tag{2}$$

(b) Untersuche die führende Asymptotik des Potentials für $x \gg |z|, a$ und skizziere die zugehörigen Äquipotentialflächen.

(c) Berechne das elektrische Feld unter Zuhilfenahme der Formel

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\text{sign}(x) - \arctan(x) \tag{3}$$

explizit und diskutiere die Grenzfälle $\pm x \gg |z|, a$.

18. **Selbstenergie (6 Punkte)**

Die Energie von N wechselwirkenden Punktladungen q_i bei $\vec{x}_i$, $i = 1, \ldots, N$, ist gegeben durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{4}$$

Nach Übergang zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung lässt sich die Energie auch über das von den Ladungen erzeugte Feld berechnen (siehe Vorlesung):

$$\tilde{U} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}^2(\vec{x}) d^3x. \tag{5}$$

(a) Der Gedanke, die letzte Formel wieder auf ein System von Punktladungen anzuwenden, liegt nahe. Es zeigt sich jedoch schon für eine einzelne Punktladung, dass das Ergebnis nicht mehr mit dem aus der ursprünglichen Formel gewonnenen übereinstimmt. Es ist $U = 0 \neq \tilde{U}$. Hier soll die Bedeutung dieses Unterschieds untersucht werden. Berechne dazu zunächst die Energie $\tilde{U}(R)$ des Feldes einer homogen geladenen Kugel ($\neq$ homogen geladene Kugelschale!) vom Radius R und betrachte sodann den Grenzfall $R \to 0$.

(b) Welcher Elektronenradius R ergibt sich, wenn man $\tilde{U}(R)$ gleich der Ruheenergie mc^2 des Elektrons setzt?

(c) Die divergierende Energie der Punktladungen wird *Selbstenergie* genannt. Subtrahiere in geeigneter Weise die Selbstenergie von der Energie $\tilde{U}$ eines Systems zweier Punktladungen und vergleiche das Ergebnis mit dem entsprechenden Wert von U.