Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
– Physik –

Prof. Dr. A. Klümper
Y. Öz (822066@uni-wuppertal.de)
D. Nawrath (D.09.01, 439-2617, dnawrath@uni-wuppertal.de)

# Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie
SoSe 2012

## 4. Übungsblatt
Abgabe 03.05.2012 vor der Vorlesung
Besprechung am 04.05.2012 in der Übung

13. **Linearer Quadrupol (4 Punkte)**

Betrachte ein System von $N$ Leitern, auf denen sich Ladungen $q_j$, $j = 1, \ldots, N$, befinden. Im Gleichgewicht stellen sich Potentiale $\varphi_j$ auf den Leitern ein. Infolge der Linearität der Maxwellschen Gleichungen besteht ein linearer Zusammenhang,

$$q_j = \sum_{k=1}^{N} C_{jk}\varphi_k, \tag{1}$$

zwischen den Potentialen und den Ladungen (siehe Vorlesung). Die Diagonalelemente $C_{jj}$ der Matrix $C$ heißen Kapazitätskoeffizienten, die Außerdiagonalelemente $C_{jk}$, $j \neq k$, elektrostatische Influenzkoeffizienten.

(a) Zeige, dass die Matrix $C$ symmetrisch ist. Betrachte hierzu eine kleine Änderung $\delta U$ der Energiedichte $U = 1/8\pi \int_V \vec{E}^2 d^3x$:

$$\delta U = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{E}\cdot\delta\vec{E} d^3x \tag{2}$$

und zeige, dass gilt: $\delta U = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j \delta q_j$ einerseits und andererseits $\delta U = \sum_{j=1}^{N} q_j \delta\varphi_j$. Betrachte nun die Ausdrücke $\frac{\partial U}{\partial q_j}$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi_j}$ und $\frac{\partial q_j}{\partial \varphi_k}$.

(b) Zeige, dass aus $U \geq 0$ folgt, dass die Kapazitätskoeffizienten $C_{jj}$ nicht negativ sind.

14. **Kapazität II (8 Punkte)**

Bestimme die (gegenseitige) Kapazität pro Längeneinheit von zwei parallelen, leitenden und unendlich langen Hohlzylindern mit Radien $a < b$ und Achsenentfernung $c < b - a$. Die Dicke der Zylindermäntel sei vernachlässigbar klein.
Hinweis: Das von den Zylindern erzeugte Feld ist das gleiche, das auch von zwei geladenen Drähten (siehe Aufgabe 10) erzeugt würde, die in der Ebene der Zylinderachsen parallel zu diesen verliefen. Hierbei befände sich der eine Draht innerhalb des inneren Zylinders und der andere außerhalb des äußeren. Betrachte die Querschnittsfläche der ineinander liegenden Hohlzylinder und zeichne die Positionen der beiden Drähte als zwei Punkte $A$ und $B$ ein.

15. **Multipole (8 Punkte)**

In der Vorlesung wurde die allgemeine Formel für die asymptotische Form des Potentials einer Ladungsverteilung für große Entfernungen $r = |\vec{x}|$ von den Ladungen hergeleitet:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{\vec{x}^t Q \vec{x}}{2r^5} + \frac{\text{Oktopolterme in Ordung } x^3}{r^7} + \ldots \tag{3}$$

Der Koeffizient des $n$-ten Terms dieser Summe ist eine Tensor $(n-1)$-ter Stufe, dessen Elemente Integrale über die Ladungsdichte, multipliziert mit einem homogenen, harmonischen und symmetrischen Polynom, sind.

(a) Bestimme die allgemeine Formel für den Oktopoltensor und prüfe nach, ob das ihn definierende Polynom harmonisch ist.

(b) Zeige, dass der Quadrupoltensor $Q$ spurlos und symmetrisch gewählt werden kann. Hinweis: Dahinter steckt eine Hauptachsentransformation.

(c) Zeige, dass das Dipolmoment unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs ist, wenn die Gesamtladung $q$ verschwindet.

(d) Beweise folgende Aussage: Sind die Ladungen bezüglich einer Achse spiegel- oder roationssymmetrisch verteilt, so ist diese Achse eine Hauptachse des Quadrupoltensors. Ist die Symmetrieachse mindestens dreizählig, so ist der Quadrupoltensor diagonal in jedem Koordinatensystem, das diese Achse als $z$-Achse enthält. In einem solchen Koordinatensystem gilt für die Diagonalelemente

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}. \tag{4}$$

(e) Bestimme den Quadrupoltensor einer homogen geladenen Kreisscheibe mit Radius $R$ (Flächenladungsdichte $\sigma$).