Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
– Physik –

Prof. Dr. A. Klümper
Y. Öz (822066@uni-wuppertal.de)
D. Nawrath (D.09.01, 439-2617, dnawrath@uni-wuppertal.de)

Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie
SoSe 2012

3. Übungsblatt
Abgabe 26.04.2012 vor der Vorlesung
Besprechung am 27.04.2012 in der Übung

9. **Die δ-Distribution (8 Punkte)**
Eine Distribution ist eine stetige und lineare Abbildung von einem "Test"-Funktionenraum in die reellen oder komplexen Zahlen. Abbildungen, die Funktionen auf Zahlen abbilden, werden traditionell als Funktionale bezeichnet. Unter Verwendung dieses Begriffs sind Distributionen stetige, lineare Funktionale auf dem Raum der Testfunktionen.
Die δ-Distribution sei wie folgt definiert. Es sei eine Funktion

$$\Delta_\epsilon(x-x_0) := \frac{1}{\epsilon^n}\Delta\left(\frac{(x-x_0)}{\epsilon}\right), \quad \epsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit

$$\Delta \in L_1(\mathbb{R}^n) \text{ und } \int_{\mathbb{R}^n} d^n x\, \Delta(x) = 1,$$

gegeben. Dann gilt für jede *Testfunktion* $f(x)$ (d.h. eine hinreichend häufig differenzierbare Funktion, die samt ihren Ableitungen für $x \to \infty$ hinreichend schnell gegen 0 geht):

$$\delta(x-x_0)[f(x)] := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} d^n x\, \Delta_\epsilon(x) f(x) = f(x_0).$$

In diesem Sinne verstehen wir die δ-Funktion als Grenzwert einer Funktionenfolge $\delta(x-x_0) = \lim_{\epsilon\to 0}\Delta_\epsilon(x-x_0)$ und das δ-Funktional angewendet auf eine Testfunktion als Integral über die δ-Funktion multipliziert mit dieser Testfunktion.
Statt $\delta(x-x_0)[f(x)]$ schreiben wir daher $\int \delta(x-x_0)f(x)d^n x$. (Bem.: In der Vorlesung wurde auch für den n-dimensionalen Fall explizit δ^n statt δ geschrieben.)

Zeige die folgenden Eigenschaften der δ-Distribution für den Fall $n = 1$:

(a) "Spezielles Δ":
$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}$$

(b) Allgemein:
$$\delta(x-x_0)f(x) = \delta(x-x_0)f(x_0)$$

(c)
$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(d)
$$\left(\frac{d^k}{dx^k}\delta(x)\right)f(x) = (-1)^k\delta(x)\frac{d^k}{dx^k}f(x)$$

(e)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x'-x)\delta(x-x'') = \delta(x'-x'')f(x_0)$$

10. **Elementare elektrostatische Probleme (6 Punkte)**
Bestimme direkt aus den Maxwellschen Gleichungen das elektrische Feld eines unendlich langen, homogen geladenen Drahtes (Ladung pro Längeneinheit λ) und einer unendlich ausgedehnten, homogen geladenen Platte (Ladung pro Flächeneinheit σ). Der Radius des Drahtes und die Dicke der Platte sind vernachlässigbar klein.

11. **Fouriertransformation (6 Punkte)**
Eine zeitunabhängige Ladungsverteilung habe die Form

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0 e^{-\kappa r} \tag{1}$$

mit $r = |\vec{x}|$ und $\kappa > 0$.

(a) Wie lautet die Fouriertransformierte von $\rho(\vec{x})$ und wie die Fouriertransformation der Maxwellschen Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi\rho$ für dieses Problem?

(b) Löse die Fouriertransformierte Maxwellsche Gleichung und berechne daraus $\vec{E}(\vec{x})$ mittels Rücktransformation. Hinweis: Es gilt

$$\int_0^\infty dk\, \frac{\sin(kr)}{(k^2+\kappa^2)^2 k} = \frac{\pi}{2\kappa^4}\left[1 - \frac{1}{2} e^{\kappa r}(\kappa r + 2)\right] \tag{2}$$

(c) Wie ergibt sich dasselbe Ergebnis unter Verwendung von Aufgabe 5?

12. **Bonusaufgabe (4 Punkte)**
Beweise (2). Dazu ist es hilfreich zunächst in

$$\int_0^\infty dk\, \frac{\sin(kr)}{(k^2+\kappa^2)^2 k}$$

das Integral auf ganz $\mathbb{R}$ zu erweitern (wie?) und die Sinus-Funktion durch Exponential-Funktionen auszudrücken nach einem leichten Verschieben des Integrationsweges (wie und warum?). Dann die üblichen Residuensatz-Techniken anwenden.