Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
– Physik –

Prof. Dr. A. Klümper
Y. Öz (822066@uni-wuppertal.de)
D. Nawrath (D.09.01, 439-2617, dnawrath@uni-wuppertal.de)

# Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie
SoSe 2012

## 1. Übungsblatt
Abgabe 12.04.2012 vor der Vorlesung
Besprechung am 13.04.2012 in der Übung

1. **Maxwellsche Gleichungen mit magnetischen Ladungen und Strömen (6 Punkte)**

In der Vorlesung wurden die Maxwellschen Gleichungen mit magnetischer Ladungs- und Stromdichte wie folgt formuliert:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad , \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 4\pi\rho_m \quad , \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m. \tag{2}$$

(a) Prüfe nach, ob diese Gleichungen unter der Transformation

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ \rho'_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \rho \\ \rho_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{j}' \\ \vec{j}'_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{j} \\ \vec{j}_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ invariant sind.

(b) Welcher Bedingung müssen $a$ und $b$ genügen, wenn zusätzlich die Lorentzkraft

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) + e_m\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right), \tag{4}$$

unter der oben genannten Transformation invariant sein soll?

(c) Zeige, dass unter der Annahme $e_m/e = \text{const.}$ für alle Elementarteilchen und aus der Wahl $b/a = e_m/e$ folgt, dass die magnetische Ladungs- und Stromdichte verschwinden:

$$\rho'_m = 0 \qquad \vec{j}'_m = 0, \tag{5}$$

dass also die Maxwellschen Gleichungen und die Lorentzkraft in ihrer ursprünglichen Form geschrieben werden können.

2. **Kontraktion von Epsilontensoren (4 Punkte)**

(a) Wie lautet die Definition des total antisymmetrischen Epsilontensors $\epsilon_{ijk}$?

(b) Berechne die einfache Kontraktion zweier Epsilontensoren $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm}$. Beachte hierbei die Einsteinsche Summenkonvention.

(c) Berechne die doppelte Kontraktion $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijm}$.

(d) Berechne die dreifache bzw. vollständige Kontraktion $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk}$.

3. **Vektoranalysis I, Identitäten (3 Punkte)**
Es seien $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x})$ und $\vec{b} = \vec{b}(\vec{x})$ zwei Vektorfelder. Zeige, dass die Identitäten

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta\vec{a}, \tag{6}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \tag{7}$$

erfüllt sind. Folgende Formeln aus Aufgabe 2 für die Kontraktionen zweier Epsilontensoren können hilfreich sein:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} = \delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l, \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon^{ijm} = 2\delta_k^m.$$