Übung 9 für Theoretische Festkörperphysik im WS 2012

Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de D.10.05)
Yahya Öz (yahya_oez@msn.com G.11.07)
Abgabe: 12.12.2012 Besprechung: 14.12.2012

1. **Zustandsdichte für lineare Ketten** (6 Punkte)
Die dimensionslosen Dispersionsrelationen der einatomaren linearen Kette und der linearen Kette mit alternierenden Massen sind gegeben über

$$\begin{aligned}\Omega^2(\kappa) &= 4\sin^2\frac{\kappa}{2},\\ \Omega^2(\kappa) &= 1+\mu\pm\sqrt{(1+\mu)^2-4\mu\sin^2\frac{\kappa}{2}},\end{aligned}$$

wobei $0 \leq \kappa < 2\pi$ und $\mu = \frac{m}{M}$ gilt. Berechne und skizziere die Zustandsdichten. Was für Singularitäten treten auf?

2. **BCH-Formel** ($3+4+1=8$ Punkte)
Wir betrachten im Folgenden Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, die linear in den Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren $\mathbf{b}_j$ und $\mathbf{b}_j^\dagger$ sind.

   (a) Beweise die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel:

   $$e^{\mathbf{C}}\mathbf{D}e^{-\mathbf{C}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\mathbf{C},\mathbf{D}]_k}{k!}, \qquad [\mathbf{C},\mathbf{D}]_0 := \mathbf{D}, \qquad [\mathbf{C},\mathbf{D}]_k = \left[\mathbf{C},[\mathbf{C},\mathbf{D}]_{k-1}\right]$$

   (b) Zeige, dass für einen in Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren linearen Operator $\mathbf{L} = c_i\mathbf{b}_i + d_j\mathbf{b}_j^\dagger$ die Relation

   $$\left\langle e^{\mathbf{L}}\right\rangle = e^{\frac{\left\langle \mathbf{L}^2\right\rangle}{2}}$$

   gilt. Die Klammer $\langle\cdot\rangle$ beschreibt dabei den thermischen Erwartungswert eines Operators in einem System mit Hamiltonian $\mathbf{H}$. Der harmonische Kristall hat den Hamiltonian

   $$\mathbf{H} = \sum_j \omega_j\left(\frac{1}{2}+\mathbf{b}_j^\dagger\mathbf{b}_j\right).$$

   (c) Zeige, dass die Relation

   $$\left\langle e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}\right\rangle = e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}e^{\frac{1}{2}\left\langle \mathbf{A}^2+2\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{B}^2\right\rangle}$$

   gilt.

3. **Debye-Waller Faktor** ($3+3=6$ Punkte)
Der Debye-Waller Faktor für ein sc-Gitter ist gegeben über

$$W(q) = \frac{\hbar q^2}{4M}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}D(\omega)\coth\frac{\hbar\beta\omega}{2}.$$

   (a) Berechne $W(q)$ für das Debye-Modell und betrachte das Verhalten für $T \ll \hbar\omega_D$ und für $T \gg \hbar\omega_D$.

   (b) Berechne $W(q)$ für das Einstein-Modell und betrachte das Verhalten für $T \ll \hbar\omega_0$ und für $T \gg \hbar\omega_0$.