Übung 7 für Theoretische Festkörperphysik im WS 2012

Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de D.10.05)
Yahya Öz (yahya_oez@msn.com G.11.07)
Abgabe: 28.11.2012 Besprechung: 30.11.2012

1. **Harmonische Kette mit verschiedenen Randbedingungen (**20 Punkte)
Betrachte N Massen $m_1, \ldots, m_N$, die durch $N-1$ Federn mit der Federkonstanten k zu einer linearen, harmonischen Kette gekoppelt wurden. Periodische Randbedingungen werden durch eine zusätzliche Feder, die die Massen m_1 und m_N verbindet, realisiert. Für feste Randbedingungen werden die Massen m_1 und m_N über Federn mit der Federkonstanten k mit einer starren Wand gekoppelt, während offene Grenzen realisiert werden, wenn die Massen m_1 und m_N überhaupt nicht miteinander gekoppelt sind. In dieser Übung betrachten wir den Fall $m_1 = \ldots = m_N =: m$. Wir wollen die harmonische Kette durch die sogenannte Transfer-Matrix-Methode analysieren. Mit leichten Modifikationen ist es möglich, die verschiedenen Randbedingungen in einer ähnlichen Weise zu behandeln.

   (a) Finden Sie die Bewegungsgleichungen für die Abweichungen $x_n(t)$ aus den Gleichgewichtspositionen im periodischen Fall. Mit dem Ansatz $x_n(t) = x_n e^{i\omega t}$ implizieren die Bewegungsgleichungen ein Eigenwertproblem der Form $\mathbf{T}\vec{x} = \Omega^2 \vec{x}$ mit $\vec{x} = (x_1(t), \ldots, x_N(t))^t$. Wie lauten die Matrix $\mathbf{T}$ und Ω^2?

   (b) Zeige, dass das Eigenwertproblem aus (a) mit der Substitution $\psi(n) = x_n(t)$ und $\varphi(n) = \psi(n-1)$ geschrieben werden kann als
$$\begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \varphi(n+1) \end{pmatrix} = \mathbf{L}\left(\Omega^2\right) \begin{pmatrix} \psi(n) \\ \varphi(n) \end{pmatrix}.$$
Wie lautet die Matrix $\mathbf{L}\left(\Omega^2\right)$? Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{L}\left(\Omega^2\right)$. Da $\mathbf{L}\left(\Omega^2\right)$ wie ein Translationsoperator wirkt, ist es nützlich, die Eigenwerte in der Form $e^{\pm i\kappa}$ zu schreiben. Warum muss nun
$$\begin{pmatrix} \psi(N+1) \\ \varphi(N+1) \end{pmatrix} = \mathbf{L}^N\left(\Omega^2\right) \begin{pmatrix} \psi(1) \\ \varphi(1) \end{pmatrix}$$
gelten? Diagonalisiere diese Gleichung. Wie lässt sich κ durch Ω^2 ausdrücken?

   (c) Bestimme alle Eigenfrequenzen ω!

   (d) Welche Modifikationen werden für feste Randbedingungen benötigt? Bestimme alle Eigenfrequenzen ω für diesen Fall.

   (e) Zeige, dass die Modifikationen für offene Ränder zu der Gleichung
$$\begin{pmatrix} 1-\Omega^2, & -1 \end{pmatrix} \mathbf{L}^{N-2}\left(\Omega^2\right) \begin{pmatrix} 1-\Omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
führen. Berechne wieder alle Eigenfrequenzen ω. Welche physikalische Bedeutung hat die Lösung $\omega = 0$? Wie sind die Eigenfrequenzen für die offene Kette und die Kette mit festen Rändern miteinander vebunden?