Übung 2 für Theoretische Festkörperphysik im WS 2012

Yahya Öz (yahya_oez@msn.com G.11.07)
Abgabe: 24.10.2012 Besprechung: 26.10.2012

1. **Reziprokes Gitter (2 Punkte)**
   Zeigen Sie, dass das reziproke Gitter des reziproken Gitters wieder das ursprüngliche Gitter ist.

2. **Netzebenen und Miller-Indizes (8 Punkte)**
   Sei $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ die Basis eines Bravaisgitters, $\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ die Basis des zugehörigen reziproken Gitters. Eine Netzebene kann durch drei Ganze Zahlen m_1, m_2, m_3 definiert werden, den Miller-Indizes. Die Miller-Indizes geben an, in welchen drei Punkten

   $$\vec{x}_j = \frac{\vec{a}_j}{m_j}, \qquad j = 1, 2, 3$$

   die Ebene die Gitterachsen, welche durch die primitiven Vektoren $\vec{a}_j$ gegeben sind, schneidet. Wenn eines der m_j gleich Null ist, so liegt der Schnittpunkt im Unendlichen und die Ebene ist parallel zur Achse orientiert.

   (a) Zeige, dass der Vektor

   $$\vec{k} = m_j \vec{b}_j$$

   senkrecht zur Ebene ist, welche durch m_1, m_2, m_3 festgelegt ist.

   (b) Zeige, dass der senkrechte Abstand der Ebene aus (a) zum Ursprung $\frac{2\pi}{|\vec{k}|}$ beträgt.

3. **Netzebenen im fcc-Gitter (10 Punkte)**
   Alle Netzebenen eines Bravaisgitters können durch Normalenvektoren beschrieben werden, welche durch die Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ des reziproken Gitters ausgedrückt werden können. Für einen senkrechten Abstand d der Ebenen hat der reziproke Gittervektor $\vec{k} = m_j \vec{b}_j$ die Länge $\frac{2\pi}{d}$. Da die m_j keinen gemeinsamen Teiler haben ist $\vec{k}$ der kürzeste reziproke Vektor senkrecht zu den Ebenen.

   (a) Zeige, dass die Dichte der Gitterpunkte pro Flächeneinheit in den Gitterebenen $\frac{d}{V}$ ist, wobei V das Volumen der durch $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ aufgespannten Einheitszelle ist.

   (b) Zeigen Sie, dass das reziproke Gitter des fcc-Gitters mit der Gitterkonstanten a das bcc-Gitter mit der Gitterkonstanten $\frac{4\pi}{a}$ ist. Definitionsgemäß ist die Gitterkonstante a die Kantenlänge des Würfels, der die Elementarzelle des fcc-Gitters mit den primitiven Vektoren

   $$\vec{a}_1 = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_y + \vec{e}_z\right), \qquad \vec{a}_2 = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_z\right), \qquad \vec{a}_3 = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$$

   umhüllt. Die Basis des bcc-Gitters mit der Gitterkonstanten a' ist

   $$\vec{a}_1' = \frac{a'}{2}\left(-\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z\right), \qquad \vec{a}_2' = \frac{a'}{2}\left(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z\right), \qquad \vec{a}_3' = \frac{a'}{2}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z\right).$$

   (c) Finde die Miller-Indizes (m_1, m_2, m_3) der Ebene des fcc-Gitters, die die höchste Dichte von Gitterpunkten hat.