Übung 13 für Theoretische Festkörperphysik im WS 2012

Yahya Öz (yahya_oez@msn.com G.11.07)
Abgabe: 23.01.2013 Besprechung: 25.01.2013

1. **BCS Gap-Gleichung I** (10 Punkte)
Betrachte den aus der Vorlesung bekannten Hamiltonoperator

$$\mathbf{H}_{eff} = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k \mathbf{c}^\dagger_{k,\sigma}\mathbf{c}_{k,\sigma} - \triangle \sum_k \mathbf{c}^\dagger_{k,\uparrow}\mathbf{c}^\dagger_{-k,\downarrow} - \triangle^* \sum_k \mathbf{c}_{k,\uparrow}\mathbf{c}_{-k,\downarrow} + \frac{V\left|\triangle\right|^2}{g}.$$

Für reelle $\triangle = g\sum_k \langle \mathbf{c}_{k,\uparrow}\mathbf{c}_{-k,\downarrow}\rangle$ kann $\mathbf{H}_{eff}$ durch eine Bogoliubov-Transformation diagonalisiert werden (siehe Übung 11, Aufgabe 2):

$$\mathbf{H}_{eff} = \sum_k \left(\sqrt{\epsilon_k^2 + \triangle^2}\left(\alpha_k^\dagger\alpha_k - \beta_k^\dagger\beta_k\right) + \epsilon_k\right) + \frac{V\triangle^2}{g}$$

Berechne $\langle \mathbf{c}_{k,\uparrow}\mathbf{c}_{-k,\downarrow}\rangle_{\mathbf{H}_{eff}}$ durch eine inverse Bogoliubov-Transformation und leite die sogenannte BCS Gap-Gleichung her:

$$\triangle = \frac{\triangle g}{2}\sum_k \frac{\mathrm{th}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\epsilon_k^2+\triangle^2}\right)}{\sqrt{\epsilon_k^2+\triangle^2}} \tag{1}$$

2. **BCS Gap-Gleichung II** (10 Punkte)
Wir wollen die BCS Gap-Gleichung für den supraleitenden Ordnungsparameter $\triangle$ analysieren. Er ist Null im normalen und nicht Null im supraleitenden Zustand. Die Ursache für die Cooper-Paare ist die attraktive Wechselwirkung von Elektronen, welche durch die Theorie der Elektron-Phonon-Kopplung verstanden werden kann. Daher kann die Summe über alle k's durch eine Integration über alle Zustände mit Energien zwischen $-\omega_D$ und ω_D ersetzt werden:

$$1 = \frac{g\rho_0}{2}\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \mathrm{d}\epsilon \frac{\mathrm{th}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\epsilon^2+\triangle^2}\right)}{\sqrt{\epsilon^2+\triangle^2}} \tag{2}$$

Hierbei gehen wir davon aus, dass die Zustandssichte $\rho(\epsilon)$ auf dem Intervall $[\omega_D, \omega_D]$ konstant ist.

(a) Berechne $\triangle_0 = \lim_{T\to 0}\triangle(T)$

(b) Analysiere (2) für große T. Wie lauet die Lösung der BCS Gap-Gleichung (1)?

(c) Die Bedingung $\triangle(T_c) = 0$ in Gleichung (2) fixiert die kritische Temperatur. Berechne T_c! Integriere zunächst partiell, nimm anschließend $\omega_D \gg T_c$ an, und nutze

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \mathrm{sech}^2 x \ln x = \ln\frac{\pi}{4} - \gamma$$

mit der Euler-Mascheroni-Konstante γ.