Übung 12 für Theoretische Festkörperphysik im WS 2012

Yahya Öz (yahya_oez@msn.com G.11.07)
Abgabe: 16.01.2013 Besprechung: 18.01.2013

1. **BCS-Grundzustand** (10 Punkte)
   In der BCS-Theorie kann der Grundzustand eines Supraleiters durch die α- und β-Teilchen beschrieben werden. Das β-Band ist komplett gefüllt, während das α-Band leer ist. Der Grundzustand $|\psi_0\rangle$ kann somit wie folgt definiert werden:
   $$\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1, \qquad \alpha_k |\psi_0\rangle = \beta_k^\dagger |\psi_0\rangle = 0$$
   (a) Zeige, dass $|\psi_0\rangle$ kein Eigenzustand des Teilchenzahloperators $\hat{\mathbf{N}} = \sum_{k\sigma} \mathbf{c}_{k\sigma}^\dagger \mathbf{c}_{k\sigma}$ ist. (Hinweis: Berechne $\left[\hat{\mathbf{N}}, \beta_k^\dagger\right]$ durch die Relation $[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\} - \{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}\mathbf{B}$. Nimm nun an, $|\psi_0\rangle$ sei ein Eigenzustand von $\hat{\mathbf{N}}$, also $\hat{\mathbf{N}}|\psi_0\rangle = N|\psi_0\rangle$ und berechne $\left[\hat{\mathbf{N}}, \beta_k^\dagger\right]|\psi_0\rangle$.)
   (b) Sei $\mathbf{P}_N$ der Projektor auf den Unterraum mit der Teilchenzahl N:
   $$\mathbf{P}_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi e^{i\left(\hat{\mathbf{N}} - N\right)\phi}$$
   Zeige, dass
   $$\widetilde{\mathbf{P}}_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi e^{-iN\phi} \prod_{k\sigma} \left(1 + \left(e^{i\phi} - 1\right) \mathbf{c}_{k\sigma}^\dagger \mathbf{c}_{k\sigma}\right),$$
   ein Projektor ist und dass $\widetilde{\mathbf{P}}_N = \mathbf{P}_N$ gilt.
   (c) Berechne $\langle \psi_0 | \mathbf{P}_N | \psi_0 \rangle$.

2. **Wick's Theorem** (10 Punkte)
   Betrachte nicht-wechselwirkende Fermionen, die durch den Hamiltonoperator $\mathbf{H} = \sum_\alpha \epsilon_\alpha \mathbf{c}_\alpha^\dagger \mathbf{c}_\alpha$ beschrieben werden.
   (a) Zeige die Identität
   $$\mathbf{c}_\alpha^\dagger e^{-\beta(\mathbf{H} - \mu\mathbf{N})} = e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} e^{-\beta(\mathbf{H} - \mu\mathbf{N})} \mathbf{c}_\alpha^\dagger,$$
   wobei $\mathbf{N} = \sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha^\dagger \mathbf{c}_\alpha$ der Teilchenzahloperator ist.
   (b) Berechne den Erwartungswert
   $$\left\langle \mathbf{c}_\alpha^\dagger \mathbf{c}_\beta \right\rangle = \frac{\mathrm{tr}\left(e^{-\beta(\mathbf{H} - \mu\mathbf{N})} \mathbf{c}_\alpha^\dagger \mathbf{c}_\beta\right)}{\mathrm{tr} e^{-\beta(\mathbf{H} - \mu\mathbf{N})}}.$$
   (Hinweis: Nutze die bekannten Kommutatoren, das zyklische Vertauschen unter der Spur und das Resultat aus der (a).)
   (c) Zeige folgende Formel:
   $$\left\langle \mathbf{c}_{\alpha_1}^\dagger \mathbf{c}_{\alpha_2}^\dagger \mathbf{c}_{\alpha_3} \mathbf{c}_{\alpha_4} \right\rangle = \left\langle \mathbf{c}_{\alpha_1}^\dagger \mathbf{c}_{\alpha_4} \right\rangle \left\langle \mathbf{c}_{\alpha_2}^\dagger \mathbf{c}_{\alpha_3} \right\rangle - \left\langle \mathbf{c}_{\alpha_1}^\dagger \mathbf{c}_{\alpha_3} \right\rangle \left\langle \mathbf{c}_{\alpha_2}^\dagger \mathbf{c}_{\alpha_4} \right\rangle.$$
   (Hinweis: Tausche $\mathbf{c}_{\alpha_4}$ nach links durch, nutze das zyklische Vertauschen unter der Spur und das Resultat aus (a).)
   (d) Wie sieht diese Formel für Bosonen aus?