Übung 11 für Theoretische Festkörperphysik im WS 2012

Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de D.10.05)
Yahya Öz (yahya_oez@msn.com G.11.07)
Abgabe: 09.01.2013 Besprechung: 11.01.2013

1. **Ginzburg-Landau Theorie** (10 Punkte)
   Ginzburg und Landau haben die Existenz einer Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ postuliert, welche Supraleitfähigkeit beschreibt,
   $$|\psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r}),$$
   wobei $n_s(\vec{r})$ die Dichte der supraleitenden Teilchen (Masse $m^\star$, Ladung $e^\star$) ist. Für die Enthalpiedichte machten sie den Ansatz
   $$g_s\left(T,\vec{H}\right) = g_n(T,0) + a|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2}|\psi(\vec{r})|^4 + \frac{\left|\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e^\star}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)\psi(\vec{r})\right|^2}{2m^\star} + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} - \frac{\vec{B}\vec{H}}{4\pi}.$$
   $g_n(T,0)$ ist die Enthalpiedichte für die normalleitenden Zustände. $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ ist das Magnetfeld im Supraleiter. Die Enthalpie hängt von der Temperatur und dem externen Magnetfeld $\vec{H}$ ab. Die Bedingung, dass die Enthalpie $G = \int_V \mathrm{d}^3 r g_s(\vec{r})$ minimal ist, führt zur Thermodynamik der supraleitenden Zustände.

   (a) Betrachte zunächst den Fall $\vec{A}(\vec{r}) = 0$ und $\psi(\vec{r}) = \text{const.} \neq 0$ und berechne a und b in Abhängigkeit von $n_s(\vec{r})$ und dem kritischen Feld H_c.

   (b) Um die Effekte von Oberflächen zu analysieren lassen wir nun räumliche Variationen von $\psi(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r}) \neq 0$ zu. Zeige, dass aus der Variation von G bezüglich $\psi^\star(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$
   $$\frac{\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e^\star}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2}{2m^\star}\psi(\vec{r}) + a\psi(\vec{r}) + b|\psi(\vec{r})|^2\psi(\vec{r}) = 0, \tag{1}$$
   $$\vec{j}_s := \frac{\hbar e^\star}{2im^\star}\left(\psi^\star(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r})\vec{\nabla}\psi^\star(\vec{r})\right) - \frac{e^{\star 2}}{cm^\star}|\psi(\vec{r})|^2\vec{A}(\vec{r}) = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left(\vec{B}-\vec{H}\right) \tag{2}$$
   folgt.

   (c) Betrachte einen Supraleiter bei $x > 0$ und einen Normalleiter bei $x < 0$. Die Gleichung (1) wird zu einer eindimensionalen Differentialgleichung. Setze
   $$f(x) = \frac{\psi(x)}{|\psi(\infty)|}$$
   und löse die Differentialgleichung mit dem Ansatz $f(x) = A\,\mathrm{th}(\alpha(x - x_0))$. Berechne A, α, x_0.

2. **Bogoliubov-Transformation** (10 Punkte)
   Betrachte den folgenden nichtdiagonalen Hamiltonoperator in Impulsdarstellung:
   $$\mathbf{H} = \sum_{k,\sigma}\epsilon_k \mathbf{c}^\dagger_{k,\sigma}\mathbf{c}_{k,\sigma} - \triangle\sum_k\left(\mathbf{c}_{-k,\downarrow}\mathbf{c}_{k,\uparrow} + \mathbf{c}^\dagger_{k,\uparrow}\mathbf{c}^\dagger_{-k,\downarrow}\right) + \frac{V\triangle^2}{g},$$
   wobei $\triangle$ und g Konstanten und $\mathbf{c}^\dagger_{k,\sigma}$ und $\mathbf{c}_{k,\sigma}$ fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit $\sigma = \uparrow,\downarrow$ sind. Also ist
   $$\left\{\mathbf{c}_{k,\sigma}, \mathbf{c}^\dagger_{k',\sigma'}\right\} = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'},$$
   wobei der Antikommutator definiert ist durch
   $$\{\mathbf{A},\mathbf{B}\} = \mathbf{AB} + \mathbf{BA}.$$
   Alle anderen Antikommutatoren sind 0.

(a) Zeige, dass die Operatoren

$$\begin{aligned}\alpha_k &= u_k \mathbf{c}_{k,\uparrow} - v_k \mathbf{c}^\dagger_{-k,\downarrow}\\ \beta_k &= u_k^\star \mathbf{c}^\dagger_{-k,\downarrow} - v_k^\star \mathbf{c}_{k,\uparrow}\end{aligned}$$

die Relationen

$$\begin{aligned}\left\{\alpha_k, \alpha^\dagger_{k'}\right\} &= \left\{\beta_k, \beta^\dagger_{k'}\right\} = \left(|u_k|^2 + |v_k|^2\right)\delta_{kk'},\\ \{\alpha_k, \alpha_{k'}\} &= \{\beta_k, \beta_{k'}\} = \{\alpha_k, \beta_{k'}\} = \left\{\alpha^\dagger_k, \beta^\dagger_{k'}\right\} = 0.\end{aligned}$$

Unter welcher Bedingung sind also α_k und β_k fermionische Vernichter?

(b) Gib die vier **c**-Operatoren ausgedrückt durch α und β an.

(c) u_k und v_k seien nun reell. Gib **H** ausgedrückt durch α und β an.

(d) Was müssen nun u_k und v_k erfüllen, damit **H** diagonal ist?

(e) Nutze nun die Bedingungen aus (a) und (d) zur Berechnung von u_k und v_k und schreibe **H** so einfach, wie möglich.