Übung 10 für Theoretische Festkörperphysik im WS 2012

Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de D.10.05)
Yahya Öz (yahya_oez@msn.com G.11.07)
Abgabe: 19.12.2012 Besprechung: 21.12.2012

1. **Debye Interpolation** (10 Punkte)
Die Zustandssumme für den harmonischen Kristall ist gegeben durch

$$Z = \mathrm{tr} e^{-\beta \mathbf{H}} = \prod_{\vec{q} \in \mathrm{BZ}} \prod_{s=1}^{3r} \mathrm{tr} e^{-\beta \omega_s(\vec{q}) \left(\mathbf{b}_{\vec{q}s}^{\dagger} \mathbf{b}_{\vec{q}s} + \frac{1}{2} \right)}.$$

(a) Zeige, dass man die Freie Energie $F = -T \ln Z$ schreiben kann als

$$F = E_0 + T \sum_{\vec{q} \in \mathrm{BZ}} \sum_{\upsilon=1}^{3N} \ln \left(1 - e^{-\beta \omega_\upsilon(\vec{q})} \right).$$

Wie lautet E_0? Nun lasse die Summe über $\vec{q}$ in ein Integral übergehen. Zeige, dass man die Freie Energie durch die Zustandsdichte schreiben kann als

$$F = E_0 + VT \int_0^\infty \mathrm{d}\omega D(\omega) \ln \left(1 - e^{-\beta \omega} \right).$$

V ist dabei das Volumen des Festkörpers.

(b) Wie lautet die Innere Energie $E = F - T \partial_T F$ explizit?

(c) In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die Spezifische Wärme c_v universelles Verhalten für niedrige und hohe Temperaturen T zeigt. Wir suchen nun ein einfaches Modell zur Interpolation zwischen den Verhalten für niedrige und hohe T. Die Zustandsdichte soll die Gleiche wie für niedrige Temperaturen sein, wir führen allerdings eine cut-off Frequenz ω_D ein, sodass die Zustandsdichte die Form

$$D(\omega) = \frac{3\omega^2}{2\pi^2 c^3} \theta(\omega_D - \omega)$$

hat. Die Zustandsdichte soll aber die gleiche Bedingung, wie für große Temperaturen T erfüllen, also

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega D(\omega) = \frac{3N}{V}.$$

N sei dabei die Anzahl der Atome im Festkörper. Zeige, dass man unter Einführung der Funktion

$$A(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \mathrm{d}t \frac{t^3}{e^t - 1}$$

auf die Relationen

$$\begin{aligned} E &= E_0 + 3NTA\left(\frac{\omega_D}{T} \right) \\ c_v &= 3N \left(A\left(\frac{\omega_D}{T} \right) - \frac{\omega_D}{T} A'\left(\frac{\omega_D}{T} \right) \right) \end{aligned}$$

kommt. Was bedeuten diese Formeln physikalisch? Zeichne c_v.

2. **Thermodynamik des supraleitenden Zustands** (10 Punkte)
Der Gleichgewichtszustand eines Supraleiters in einem homogenem Magnetfeld wird durch die Temperatur T und die Stärke des Magnetfelds H festgelegt. Die thermodynamische Identität für die Gibbssche freie Energie ist

$$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T - M\mathrm{d}H.$$

S ist die Entropie und $M = mV$ die Magnetisierung (m ist die Magnetisierungsdichte). Die Phasengrenze zwischen den supraleitenden und den normalleitenden Zuständen in der H-T-Ebene ist durch $H_c(T)$ gegeben (siehe Vorlesung).

   (a) Zeige, aus der Tatsache, dass G kontinuierlich an der Phasengrenze ist, dass

   $$\frac{\mathrm{d}H_c(T)}{\mathrm{d}T} = \frac{S_n - S_s}{M_s - M_n}$$

   gilt.

   (b) Zeige, unter Verwendung der Tatsache, dass der supraleitende Zustand perfekten Diamagnetismus ($B = 0$) aufweist, während der normalleitende Zustand vernachlässigbaren Diamagnetismus ($M \approx 0$) aufweist, dass die Diskontinuität der Entropie an der Phasengrenze durch

   $$S_n - S_s = -\frac{V}{4\pi} H_c \frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}T}$$

   gegeben ist. Zeige, dass somit die latente Wärme durch

   $$Q = -TV \frac{H_c}{4\pi} \frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}T}$$

   gegeben ist, wenn der Übergang in einem Feld auftritt.

   (c) Zeige, dass, wenn der Übergang in einem Nullfeld auftritt, eine Diskontinuität der spezifischen Wärme auftritt, welche gegeben ist durch

   $$(c_p)_n - (c_p)_s = -\frac{T}{4\pi} \left(\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}T}\right)^2.$$