
Übung 9 für Statistische Mechanik im SS 2016

Prof. Dr. Andreas Klümper

Norman Gundlach (n.gundlach@uni-wuppertal.de F.12.15)

Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)

Abgabe: 20.06.2016, 12:00 Uhr in Postfach Öz auf D.10

Besprechung: 21.06.2016, 08:30 Uhr / 24.06.2016, 10:15 Uhr

1. Ableitungen (3)

- (a) Schreibe $\left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_V$ als geeignete Ableitungen des thermodynamischen Potentials $E = E(S, V, N)$ nach den natürlichen Variablen.
- (b) Wir betrachten das großkanonische Potential $\Phi = \Phi(T, h)$ eines magnetischen Systems, wobei h die Bedeutung eines Magnetfeldes hat, sodass $M = -\left. \frac{\partial \Phi}{\partial h} \right|_T$ die Bedeutung einer Magnetisierung hat. Die Suszeptibilität ist dann $\chi = -\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2} \right|_T$.
- Folgere aus $\left. \frac{\partial^2}{\partial h^2} \right|_T \left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_h \Phi \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0$ (warum?), dass auch $\left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_h \chi \rightarrow 0$ gilt.
 - Was würden Sie vermuten, wenn dennoch jemand $\left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_h \chi \rightarrow \infty$ messen oder rechnen würde?

2. Latente Wärme (5)

Die latente Wärme von Eis pro Masseinheit sei Q_L . Ein Gefäß enthält eine Mischung von Wasser und Eis am Gefrierpunkt (absolute Temperatur T_0). Es soll zusätzlich Wasser der Masse m in dem Gefäß mit einem Kühlapparat gefroren werden. Die vom Kühlapparat abgegebene Wärme wird verwendet, um einen Körper der Wärmekapazität C und der Anfangstemperatur T_0 aufzuwärmen. Wie groß ist die minimale Wärmemenge, die vom Kühlapparat an den Körper abgegeben wird? (C sei temperaturunabhängig.)

3. Mischentropie idealer Gase (6)

Gegeben sei ein klassisches ideales Gas bestehend aus n Teilchensorten.

- (a) Berechne das chemische Potential $\mu(p, T)$ für den Fall $n = 1$. Nutze die Eigenschaften des idealen Gases aus, um die Freie Energie $F(T, V, N_1, \dots, N_n)$ für den allgemeinen Fall anzugeben.

(b) Betrachte jetzt den Fall $n = 2$. Die beiden Systeme S_I und S_{II} seien zunächst durch eine Trennwand getrennt. Temperatur und Druck der Gase sei gleich. Wird die Trennwand entfernt, so hat jede Komponente das Volumen $V_I + V_{II}$ zur Verfügung. Betrachtet man die Entropie als Maß für das System, dann sollte diese beim Mischvorgang ansteigen und bei völliger Durchmischung ihr Maximum erreichen. Dieser Entropiegewinn wird als Mischentropie bezeichnet. Als Folge davon erhält man eine Mischenthalpie, etc...

Berechne für den Fall $n = 2$ die Mischenthalpie und die Mischentropie des Systems. Was passiert, wenn die beiden zunächst unterscheidbaren Teilchensorten ununterscheidbar werden?

Tipp: Die Entropie eines einkomponentigen idealen Gases ist gegeben durch:

$$S = k_B N \left(\frac{5}{2} + \ln \frac{V}{N \lambda^3} \right), \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

4. Kanonisches Ensemble identischer Teilchen (6)

Für ein Ensemble von N identischen, unabhängigen Teilchen im Kontakt mit einem Thermostat lautet der Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^N \mathbf{h}_j.$$

Dabei ist \mathbf{h}_j der Hamiltonoperator für das j -te Teilchen (da die Teilchen identisch sind, ist die funktionale Form der \mathbf{h}_j gleich). Die zugehörigen Eigenzustände haben Eigenenergien so, dass $\mathbf{h} |\lambda_k\rangle = \epsilon(\lambda_k) |\lambda_k\rangle$ gilt. Es sollen die Zustandssummen für den Fall unterscheidbarer (Z_u), bosonischer (Z_b) und fermionischer (Z_f) Teilchen untersucht werden.

- Betrachte den Fall zweier Teilchen ($N = 2$) und zweier Energiezustände. Wie lauten Z_u , Z_b und Z_f ? Gilt eine einfache Beziehung wie $Z_b = \frac{Z_u}{2}$ oder $Z_b = \sqrt{Z_u}$?
- Gib Z_u für den allgemeinen Fall an. Wodurch ist ein Systemzustand bestimmt?
- Berechne Z_b und Z_f allgemein. Wie kann nun ein Systemzustand dargestellt werden?
- Zeige, dass im Grenzfall sehr kleiner mittlerer Besetzungszahlen $n_\lambda \ll 1 \forall \lambda$ gilt:

$$Z_u \rightarrow N! Z_{b,f}$$

Was bedeutet die Bedingung $n_\lambda \ll 1$ für das Ideale Gas?