# Übung 8 für Statistische Mechanik im SS 2016


Prof. Dr. Andreas Klümper

Norman Gundlach (n.gundlach@uni-wuppertal.de F.12.15)

Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)


Abgabe: 13.06.2016, 12:00 Uhr in Postfach Öz auf D.10

Besprechung: 14.06.2016, 08 : 30 Uhr / 17.06.2016, 10 : 15 Uhr

1. **Quantenmechanischer Oszillator** (7)

   Betrachte einen harmonischen Oszillator mit

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{q}^2.$$

   (a) Gebe den formalen Ausdruck für die kanonische Dichtematrix $\boldsymbol{\rho}$ an ausgedrückt durch die Eigenzustände $\{|n\rangle\}$ und Energieeigenwerte $\{\epsilon_n\}$.

   (b) Wie lautet die Zustandssumme $Z$ sowie die mittlere thermische Energie $\langle \mathbf{H} \rangle$?

   (c) Zeige, dass für einen allgemeinen Operator $\mathbf{A}(x)$

$$\frac{\boldsymbol{\partial} e^{\mathbf{A}(x)}}{\boldsymbol{\partial} x} \neq \frac{\boldsymbol{\partial} \mathbf{A}(x)}{\boldsymbol{\partial} x} e^{\mathbf{A}(x)}$$

   gilt, es sei denn es ist $\left[\mathbf{A}(x), \frac{\boldsymbol{\partial}\mathbf{A}(x)}{\boldsymbol{\partial} x}\right] = 0$. Zeige, dass hingegen

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x} \mathrm{tr}\; e^{\mathbf{A}(x)} = \mathrm{tr}\; \left(\frac{\boldsymbol{\partial} \mathbf{A}(x)}{\boldsymbol{\partial} x} e^{\mathbf{A}(x)}\right)$$

   gilt.

   (d) Die Zustandssumme hängt nicht von $m$ ab. Zeige dadurch

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{q}^2 \right\rangle.$$

   (e) Berechne $\langle \mathbf{q}^2 \rangle$.

   (f) Berechne in Ortsdarstellung $\langle q' | \boldsymbol{\rho} | q \rangle$ in der Hochtemperaturentwicklung.

(g) Bei niedrigen Temperaturen ist $\boldsymbol{\rho}$ durch tief liegende Energiewerte dominiert. Verwende die Wellenfunktion des Grundzustandes, um den Grenzfall $T \to 0$ von $\langle q' | \boldsymbol{\rho} | q \rangle$ zu erhalten.

2. **Thermodynamische Relationen** (4)
   Zeige:

   (a) $\left.\frac{\partial E}{\partial N}\right|_{T,V} = \mu - T \left.\frac{\partial \mu}{\partial T}\right|_{N,V}$

   (b) $\left.\frac{\partial N}{\partial T}\right|_{V,\frac{\mu}{T}} = \frac{1}{T} \left.\frac{\partial N}{\partial \mu}\right|_{T,V} \left.\frac{\partial E}{\partial N}\right|_{T,V}$

   (c) $\left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{V,\frac{\mu}{T}} = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{V,N} + \frac{1}{T} \left.\frac{\partial N}{\partial \mu}\right|_{T,V} \left( \left.\frac{\partial E}{\partial N}\right|_{T,V} \right)^2$

   (d) $\left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_{T,N} = - \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{p,N}$

3. **Wärmeausdehnung** (3)
   Neben dem schon in der Vorlesung eingeführten Wärmeausdehnungskoeffizienten zu konstantem Druck $\alpha_p = \frac{1}{V} \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p$ definieren wir noch die Ausdehnung zu konstanter Entropie $\alpha_S = \frac{1}{V} \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_S$. Zeige:

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_S} = 1 - \frac{c_p}{c_V}$$

4. **Absolute Temperatur und thermodynamische Relationen** (3)

   (a) Was ist $\frac{c_p - c_V}{V \alpha_p^2} \kappa_T$?

   (b) Nehmen wir jetzt an, dass wir obige Größen alle messen können. Dabei benutzen wir allerdings ein Thermometer, das uns nur eine empirische Temperatur $\theta$ liefert. Wie sieht die Relation aus (a) dann aus? Bestimme daraus die absolute Temperatur $T(\theta)$!

5. **Ein Jahrhundert Quantenmechanik** (3)

   (a) Beweise das Äquipartitionstheorem für eine (klassische) Hamiltonfunktion $H$:

$$\left\langle x_j \frac{\partial H}{\partial x_k} \right\rangle = \delta_{jk} k_B T$$

   (b) Wende diese Gleichung auf eine Hamiltonfunktion der Gestalt

$$H = \sum_{j=1}^{f} \left( A_j p_j^2 + B_j q_j^2 \right)$$

an. Was ergibt sich für $c_V$? Welches Verhalten von $c_V$ sagt demnach die klassische Mechanik für ein reales physikalisches System voraus? Vergleiche mit dem Ergebnis aus Übung 7 Aufgabe 3!