
Übung 5 für Statistische Mechanik im SS 2016

Prof. Dr. Andreas Klümper

Norman Gundlach (n.gundlach@uni-wuppertal.de F.12.15)

Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)

Abgabe: 13.05.2016, 12:00 Uhr in Postfach Öz auf D.10

Besprechung: 24.05.2016, 08 : 30 Uhr / 27.05.2016, 10 : 15 Uhr

1. Klassisches ideales Gas (6)

Gegeben sei ein Gas aus N wechselwirkungsfreien Teilchen in einem Volumen V .

(a) Zeige für die Oberfläche der d -dimensionalen Einheitskugel

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

Tipp: Beachte Aufgabe 3. aus Übung 2 und berechne das d -dimensionale Gauß-Integral in sphärischen Polarkoordinaten.

(b) Berechne die Zustandsdichte des Systems auf einer Energiehyperfläche (entspricht einer $3N$ -dimensionalen Kugeloberfläche im Impulsraum)

$$E = \sum_{j=1}^{3N} \frac{p_j^2}{2m}.$$

Berechne dazu zunächst die Anzahl $\Phi(E)$ der Zustände mit Energie $\leq E$ im Phasenraum.

(c) Für obiges Gas gelte einmal die normale mikrokanonische Verteilung

$$\rho_{mkl} = \begin{cases} 1 & \text{für } E \leq H(\vec{p}, \vec{q}) \leq E + \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und dann die gleichförmige Verteilung

$$\rho_{mkl} = \begin{cases} 1 & \text{für } H(\vec{p}, \vec{q}) \leq E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zur Energie E , wobei Δ als infinitesimal klein angenommen werden kann. Berechne für beide Verteilungen die Erwartungswerte $\langle H \rangle$ und $\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle$ für große N . Interpretiere das Resultat.

2. Das ideale Gas (6)

Wir benutzen hier die Zustandssumme des idealen Gases, die durch

$$Z(E) = \frac{3N}{2EN! \frac{3N}{2}!} \left(\frac{E}{\gamma} \right)^{\frac{3N}{2}}$$

mit $\gamma = \frac{2\pi\hbar^2}{mL^2}$ gegeben ist.

- (a) Berechne die kanonische Zustandssumme, die Zustandssumme der großkanonischen Gesamtheit und die zugehörigen thermodynamischen Potentiale.
- (b) Leite die Zustandsgleichung her, d. h. $p = p(T, n)$.
- (c) Das ideale Gas durchlaufe jetzt einen Carnot-Prozess.
 - i. Berechne im (p, V) -Diagramm die Isothermen und die Adiabaten. Wie sehen diese im (T, S) -Diagramm aus?
 - ii. Berechne die Arbeit zu jedem Schritt des Carnot-Prozesses und überprüfe explizit, dass der sich hier ergebene Wirkungsgrad in diesem speziellen Fall mit der allgemeinen Formel übereinstimmt.

3. Ideales Gas (4)

Zeige für ein Ideales Gas

$$\left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_T = 0.$$

4. Steilheit von Isothermen gegenüber Adiabaten (4)

Zeige, dass für ein Ideales Gas

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T > \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_S$$

gilt.