Übung 2 für Statistische Mechanik im SS 2016

Prof. Dr. Andreas Klümper
Norman Gundlach (n.gundlach@uni-wuppertal.de F.12.15)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)

Abgabe: 22.04.2016, 12:00 Uhr in Postfach Öz auf D.10
Besprechung: 26.04.2016, 8:30 Uhr in F.13.15

1. **Exaktes Differential** (3)
   Zeige ausgehend von
   $$\delta Q = \mathrm{d}E + p\mathrm{d}V$$
   und der Tatsache, dass $\mathrm{d}E$ ein exaktes Differential ist, dass δQ kein exaktes Differential ist. Bemerkung: Hier können als natürliche Variablen (Argumente) der Funktion E die Temperatur T und das Volumen V oder auch andere gewählt werden (welche sind die geschicktesten?).

2. **Erwartungs- und Schätzwerte** (10)
   Wir betrachten eine physikalische Observable A und behandeln sie als stochastische Variable, die nach einer zunächst unbekannten Verteilung Werte annimmt. N Messungen von A liefern Ergebnisse $a^{(1)}, \dots, a^{(N)}$, wobei diese Werte von A aus der Menge $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ stammen. Das arithmetische Mittel a_N und die Varianz v_N über alle Messungen sind definiert durch
   $$a_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a^{(j)}, \qquad v_N = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(a^{(j)} - a_N\right)^2 .$$

   (a) Die N Messungen werden durch Angabe der Häufigkeit n_k, mit der der Wert α_k gemessen wurde, beschrieben. Formuliere für die stochastische Variable A den Erwartungswert $\bar{A} = \lim_{N\to\infty} a_N$ und die Standardabweichung $\triangle A = \sqrt{\lim_{N\to\infty} v_N}$ unter Einführung der Größe $w_k = \lim_{N\to\infty} \frac{n_k}{N}$. Zeige:
   $$(\triangle A)^2 = \overline{\left(A - \bar{A}\right)^2}$$
   Welche Bedeutung haben die w_k? Nenne grundlegende Eigenschaften.

(b) Betrachte nun n viele gleichartige, aber unabhängige Kopien des Systems und behandle die physikalische Observable $A^{(j)}$ für Kopie j als stochastische Variable. Alle $A^{(j)}$ seien unabhängig und nach der gleichen Verteilungsfunktion verteilt.

Betrachte nun

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} A^{(j)}, \qquad V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(A^{(j)} - A_n\right)^2 \tag{1}$$

als stochastische Variable. Zeige für den Erwartungswert von A_n und den Erwartungswert von V_n

$$\bar{A}_n = \bar{A}, \qquad \bar{V}_n = (\triangle A)^2\,,$$

wobei $\bar{A}$ und ΔA wie in Teil (a) sind.

Warnung: Hier ist eine andere Rechnung als in (a) zu leisten. Beachte: n kann hier beliebig sein, z.B. $n = 2$.

3. **Stirling-Formel** (7)

Die Integraldarstellung der Gammafunktion für $x \in \mathbb{R}^{>0}$ lautet

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{x-1} e^{-t}.$$

(a) Zeige für $n \in \mathbb{N}^{>0}$, dass $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ und $\Gamma(1) = 1$ gilt. Folgere daraus $n! = \Gamma(n+1)$.

(b) Beweise die Stirling-Formel

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty \mathrm{d}t e^{-t+n\ln t} \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

durch Entwickeln des Exponenten im Integral um sein Maximum bis zur quadratischen Ordnung.