# Übung 12 für Statistische Mechanik im SS 2016

Prof. Dr. Andreas Klümper
Norman Gundlach (n.gundlach@uni-wuppertal.de F.12.15)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)

Abgabe: 11.07.2016, 12:00 Uhr in Postfach Öz auf D.10
Besprechung: 12.07.2016, 08:30 Uhr / 15.07.2016, 10:15 Uhr

1. **Ising-Modell** (5)
   Betrachte das Ising-Modell unter periodischen Randbedingungen mit

$$H = -J\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\sigma_{j+1} - B\sum_{j=1}^{N}\sigma_j.$$

   Berechne die Zustandssumme

$$Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm 1}\dots\sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{\beta\left(\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\sigma_{j+1}+B\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\right)}.$$

   Sortiere dafür zunächst die Summe um und führe die Matrix

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,-1} \\ t_{-1,1} & t_{-1,-1} \end{pmatrix}$$

   mit den Einträgen

$$t_{\sigma_j\sigma_{j+1}} = e^{\beta\left(J\sigma_j\sigma_{j+1}+\frac{B}{2}(\sigma_j+\sigma_{j+1})\right)}$$

   ein, sodass die Zustandssumme geschrieben werden kann als

$$Z_N = \mathrm{tr}\mathbf{t}^N.$$

   Berechne nun die Zustandssumme, die Freie Energie pro Platz und die Magnetisierung pro Platz.

2. **Bose-Einstein-Kondensation I** (5)
   Berechne die Fluktuationen in der Teilchenzahl und der Energie fur ein ideales Bosegas im großkanonischen Ensemble oberhalb der kritischen Temperatur. Was folgt für $T \to T_c$?

3. **Bose-Einstein-Kondensation II** (5)

Betrachte ein ideales molekulares Bosegas. Es sei angenommen, dass bei genügend niedrigen Temperaturen aus dem Spektrum der inneren molekularen Freiheitsgrade nur der Grundzustand mit $\epsilon_0 = 0$ sowie der erste angeregte Zustand mit $\epsilon_1 > 0$ thermodynamisch relevant sind. Berechne die Kondensationstemperatur $T_c$ als Funktion von $\epsilon_1$. Zeige insbesondere, dass

$$\frac{T_c}{T_c^0} \approx 1 - \frac{2}{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} e^{-\frac{\epsilon_1}{k_B T_c^0}}, \qquad \epsilon_1 \gg k_B T_c^0,$$

$$\frac{T_c}{T_c^0} \approx \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \left(1 + \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\frac{\pi\epsilon_1}{k_B T_c^0}}\right), \qquad \epsilon_1 \ll k_B T_c^0$$

gilt, wobei $T_c^0$ die Kondensationstemperatur eines idealen Bosegases von Teilchen derselben Masse und Dichte, aber ohne innere Freiheitsgrade, bezeichnet.

4. **Bose-Einstein-Kondensation III** (5)

Betrachte ein ideales Bosegas im Kontinuumlimes

- in einem Kastenpotential in $d = 1$ Dimension,
- in einem isotropen harmonischen Potential in $d = 2$ Dimensionen,
- in einem isotropen harmonischen Potential in $d = 3$ Dimensionen.

In welchen Fällen tritt Bose-Einstein-Kondensation auf? Bestimme die entsprechenden Kondensationstemperaturen. Berechne die Kondensationstemperatur eines Gases aus 106 Na-Atomen in einer Falle mit Kreisfrequenz $\frac{\omega}{2\pi} = 60$ Hz.