Übung 11 für Statistische Mechanik im SS 2016

Prof. Dr. Andreas Klümper
Norman Gundlach (n.gundlach@uni-wuppertal.de F.12.15)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)

Abgabe: 04.07.2016, 12:00 Uhr in Postfach Öz auf D.10
Besprechung: 05.07.2016, 08:30 Uhr / 08.07.2016, 10:15 Uhr

1. **Ideales Fermigas bei $T = 0$** (5)

   In der Vorlesung wurde das ideale Fermigas bei $T = 0$ betrachtet und die durchschnittliche Teilchenzahl N berechnet so wie die Begriffe der Fermi-Temperatur und des Fermi-Impulses eingeführt.

   (a) Berechne die Grundzustandsenergie bei $T = 0$ einmal in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls und einmal in Abhängigkeit von Teilchenzahl und Fermi-Energie.

   (b) Folgere aus diesem Ergebnis den Druck des idealen Fermigases bei $T = 0$.

2. **Eindimensionales Elektronengas** (5)

   Betrachtet wird ein eindimensionales Elektronengas mit $S = \frac{1}{2}$, das aus N Teilchen im Raumintervall $(0, L)$ besteht.

   (a) Wie groß sind Fermi-Impuls p_F und Fermi Energie ϵ_F?

   (b) Benutze die aus der Vorlesung bekannte Sommerfeld-Entwicklung, um das chemische Potential $\mu\left(T, \frac{N}{L}\right)$ zu berechnen.

   (c) Wie unterscheidet sich das Ergebnis in (b) vom Ergebnis für drei Dimensionen? Welche physikalische Erklärung gibt es für dieses qualitativ unterschiedliche Verhalten?

3. **Pauli Paramagnetismus** (5)

   Im äußeren Magnetfeld verschiebt sich die Einteilchenenergie eines Gases freier Spin-$\frac{1}{2}$ Fermionen gemäß

   $$\epsilon_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \to \epsilon_{\vec{p},s} = \epsilon_{\vec{p}} + \sigma \mu_B B.$$

   Dabei ist $\sigma = \pm 1$ die Spinkomponente im Magnetfeld und $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ ist das Bohrsche Magneton. Dadurch erhält man bei gleichem chemischen Potential μ verschiedene

Verteilungsfunktionen $\langle n_{\vec{p},s}\rangle$. Magnetisierung und Suszeptibilität sind definiert durch

$$M = -\mu_B \left(\langle N_+\rangle - \langle N_-\rangle\right), \qquad N_\sigma = \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p},s}, \qquad \chi\left(T,B\right) = \left.\frac{\boldsymbol{\partial} B}{\boldsymbol{\partial} M}\right|_{T,N}.$$

(a) Zeige:

$$\chi\left(T,0\right) = \mu_B^2 N \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\epsilon D'\left(\epsilon\right) f\left(\epsilon\right)$$

Dabei ist $D\left(\epsilon\right)$ die Einteilchenzustandsdichte und $f\left(\epsilon\right)$ die Fermifunktion zum chemischen Potential μ

$$f\left(\epsilon\right) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}.$$

(b) Berechne $\chi\left(T,0\right)$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}\left(T^2\right)$ einschließlich (Sommerfeld-Entwicklung) bei vorgegebener Teilchenzahl N (die Temperaturabhängigkeit von μ ist zu berücksichtigen). Wie lautet das Ergebnis, wenn $\epsilon_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ gilt?

4. **Landauscher Diamagnetismus** (5)
Wir betrachten freie Elektronen in einem schwachen, homogenen Magnetfeld B, das in z-Richtung zeigt.

(a) Zeige, dass die Bahnbewegung eines Elektrons quantisiert ist und die Energieniveaus durch

$$\epsilon = \frac{p_z^2}{2m} + \left(2n+1\right)\mu_B B, \qquad p_z \in \mathbb{R}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

gegeben sind. Dabei berücksichtigen wir die Kopplung des Spins an das Magnetfeld nicht, da dies zum Paulischen Paramagnetismus führt, der schon besprochen wurde. Hinweis: Gehe von $H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$ aus und nutze dann die Landaueichung für das Vektorpotential $\vec{A}$.

(b) Berechne die Zahl der Zustände im Intervall $\mathrm{d}p_z$ bei festgehaltenem n.

(c) Zeige, dass aus der Euler-McLaurin Formel

$$\frac{1}{2}F\left(a\right) + \sum_{n=1}^{\infty} F\left(a+n\right) \approx \int_a^\infty \mathrm{d}x F\left(x\right) - \frac{1}{12}F'\left(a\right)$$

die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n+\frac{1}{2}\right) \approx \int_a^\infty \mathrm{d}x F\left(x\right) + \frac{1}{24}F'\left(0\right)$$

folgt.

(d) Berechne die großkanonische Zustandssumme Φ für das System und nutze die Näherungsformel aus Teil (c), um diese zu vereinfachen.

(e) Errechne nun die magnetische Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial B^2}$ für tiefe Temperaturen und vergleiche dann das Ergebnis mit dem führenden, temperaturunabhängigen Term der paramagnetischen Suszeptibilität aus Aufgabe 2.
Hinweis: Bei richtiger Rechnung sollte

$$\chi_{\text{Dia}} = -\frac{1}{3}\chi_{\text{Para}}$$

gelten.