

---

# Übung 10 für Statistische Mechanik im SS 2016

Prof. Dr. Andreas Klümper

Norman Gundlach (n.gundlach@uni-wuppertal.de F.12.15)

Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)

Abgabe: 27.06.2016, 12:00 Uhr in Postfach Öz auf D.10

Besprechung: 28.06.2016, 08:30 Uhr / 01.07.2016, 10:15 Uhr

## 1. Entropie von Quantengasen (5)

Zeige aus dem großkanonischen Potential für die Entropie eines idealen Quantengases

$$S = k_B \sum_{\vec{k}} \left( -n_{\vec{k}} \ln n_{\vec{k}} - \nu (1 - \nu n_{\vec{k}}) \ln (1 - \nu n_{\vec{k}}) \right).$$

Dabei ist  $n_{\vec{k}}$  die mittlere Besetzungszahl des Zustands zur Energie  $\epsilon(\vec{k})$  und  $\nu = \mp 1$  für Bosonen / Fermionen. Betrachte den Ausdruck im klassischen Grenzfall und im Tieftemperaturgrenzfall.

## 2. Singularitäten und thermodynamischer Limes (5)

In der Vorlesung wurde erwähnt, dass Nichtanalytizitäten bei thermodynamischen Größen nur im thermodynamischen Limes auftreten. Um dies etwas näher zu beleuchten, wollen wir ein Modell betrachten, das bei vorgegebenem Volumen  $V$  und chemischem Potential  $\mu$  durch folgende Zustandssumme beschrieben wird:

$$Z_g = (1 + z)^V (1 + z^{\alpha V}), \quad z = e^{\beta\mu} \text{ und } \alpha > 0 \text{ konstant}$$

- Berechne die Nullstellen von  $Z_g$  in  $z$  und betrachte ihr Verhalten im Limes  $V \rightarrow \infty$ .
- Berechne den Druck  $p(z, V)$  und zeige, dass diese Funktion im Limes  $V \rightarrow \infty$  gegen eine stetige Funktion konvergiert. Diese ist allerdings nicht überall analytisch. Wo nicht? Skizziere  $p(z)$  für  $V \rightarrow \infty$ .
- Zeige, dass  $\frac{1}{v} = \frac{z}{V} \frac{\partial \ln Z_g}{\partial z}$  mit  $v = \frac{V}{N}$  gilt. Führe den thermodynamischen Limes durch und zeichne die Funktion  $\frac{1}{v}(z)$ .
- Eliminiere  $z$  grafisch, d. h. zeichne die Funktion  $p(v)$ .

---

### 3. Schwarzkörperstrahlung (5)

In der Vorlesung wurde das Plancksche Strahlungsgesetz für die Hohlraumstrahlung hergeleitet. Dieses besagt, dass die spektrale Energiedichte (Energie pro Volumen- und Frequenzeinheit) der Strahlung gegeben ist durch

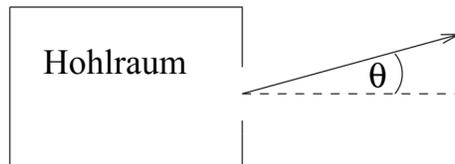
$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}.$$

Wir wollen jetzt die von einer Öffnung des Hohlraums abgestrahlte Leistung berechnen. Die Strahlung im Hohlraum ist völlig isotrop, d. h.  $\frac{u(\omega)}{4\pi} d\Omega$  ist die spektrale Energiedichte der Strahlung in den Einheitsraumwinkel  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ . Die Wände des Hohlraums sollen die auf sie treffende Strahlung vollständig absorbieren und ohne Änderung des Einfallswinkels oder der Frequenz wieder emittieren.

Begründe, dass die pro Zeiteinheit durch die Einheitsfläche der Öffnung austretende Strahlungsenergie (der Strahlung mit Frequenz  $\omega$ ) durch

$$I(\omega, T) = \frac{c}{4\pi} \int d\Omega \cos\theta u(\omega)$$

gegeben ist, wobei sich die Integration über eine Halbkugel erstreckt (siehe Skizze). Berechne  $I(\omega, T)$  und anschließend durch Integration über die Frequenz die abgestrahlte Leistung pro Flächeneinheit der Öffnung.



### 4. Thermodynamik Schwarzer Löcher (5)

Nach Bekenstein und Hawking ist die Entropie eines Schwarzen Loches mit Oberfläche  $A$  gegeben durch

$$S = \frac{k_B A}{4\lambda_P^2}, \quad \lambda_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}.$$

- (a) Berechne die Fluchtgeschwindigkeit bezogen auf einen Radius  $R$  von einer Masse  $M$  mittels klassischer Mechanik. Stelle eine Beziehung zwischen dem Radius und der Masse eines Schwarzen Loches her.

- i. Erhöht oder erniedrigt sich die Entropie, wenn zwei Schwarze Löcher fusionieren? Was ist die Entropieänderung im Universum, wenn zwei Schwarze Löcher mit jeweils der Sonnenmasse ( $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ) verschmelzen?

- 
- (b) Die Innere Energie eines Schwarzen Lochs ist durch  $E = Mc^2$  gegeben.
- i. Berechne die Temperatur des Schwarzen Lochs ausgedrückt durch seine Masse.
  - ii. Wie groß ist die Masse eines Schwarzen Lochs im thermischen Gleichgewicht mit der momentanen Hintergrundstrahlung von  $T = 2.7$  K?
  - iii. Ein Schwarzes Loch sendet aufgrund von Paarerzeugung auf seinem Ereignishorizont thermische Strahlung exakt nach Planck aus. Berechne die Rate der Energieabnahme aufgrund dieser Strahlung.
  - iv. In welcher Zeit verdampft das Schwarze Loch? Wie lang ist diese Zeit im Fall eines Schwarzen Lochs mit der Masse der Sonne?