

Rechenmethoden der Physik

A. Klümper

Theoretische Physik, Bergische Universität Wuppertal

Inhaltsverzeichnis

Rechenmethoden der Physik	
A. Klümper	1
1 Notationen	3
2 Lineare Algebra	4
2.1 Vektorrechnung	4
2.2 Lineare Abbildungen	7
3 Differentialrechnung	14
4 Integralrechnung	17
5 Mehrdimensionale Integrale	24
6 Vektoranalysis	31
7 Gewöhnliche Differentialgleichungen	36

1 Notationen

In der naturwissenschaftlichen Literatur benutzte griechische Symbole:

Alpha α , Beta β , Gamma γ , Delta δ , Δ , Epsilon ϵ , Zeta ζ , Eta η , Theta θ , Θ , Iota ι , Kappa κ , Lambda λ , Λ , My μ , Ny ν , Xi ξ , (Omikron), Pi π , Π , Rho ρ , Sigma σ , Σ , Tau τ , (Ypsilon), Phi ϕ , Φ , Chi χ , Psi ψ , Ψ , Omega ω , Ω

2 Lineare Algebra

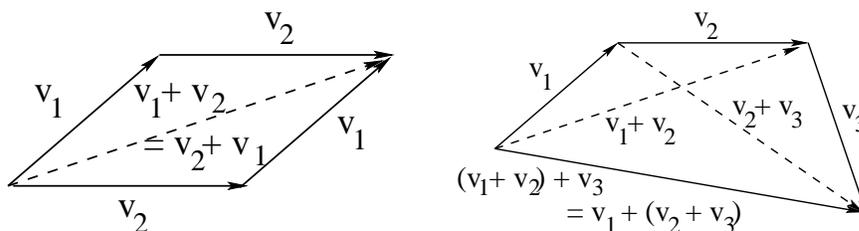
2.1 Vektorrechnung

Unter Vektoren versteht man gemeinhin Objekte mit Länge und Richtung. Ein Vektorraum ist eine Menge von Vektoren mit der Erklärung einer Addition von Vektoren und einer Multiplikation mit Zahlen (Skalaren). Systematisch:

Definition: Vektorraum

Ein reeller Vektorraum ist eine Menge V , deren Elemente Vektoren genannt werden, zusammen mit einer Addition $+$ und einer Multiplikation mit reellen Zahlen (“skalare Multiplikation”) die folgenden Axiomen genügen

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= v_2 + v_1 && \text{(Kommutativgesetz)} \\ v_1 + (v_2 + v_3) &= (v_1 + v_2) + v_3 && \text{(Assoziativgesetz)} \end{aligned} \quad (2.1)$$



Es gibt einen “Nullvektor” 0 , charakterisiert durch

$$v + 0 = 0 + v = v \quad (2.2)$$

Zu jedem Vektor v gibt es einen entgegengesetzten Vektor $-v$, so daß

$$v + (-v) = (-v) + v = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \xleftarrow{-v} \end{array} = 0$$

Ein solches algebraisches System heißt kommutative oder abelsche Gruppe.

Ferner:

$$\begin{aligned} r(v_1 + v_2) &= (rv_1) + (rv_2) && r, s \in \mathbb{R} \\ (r + s)v &= (rv) + (sv) \\ (rs)v &= r(sv) \\ 1v &= v \end{aligned} \quad (2.4)$$

Beispiel: Der Prototyp eines (endlichdimensionalen) Vektorraums ist der Raum der n -Tupel \mathbb{R}^n , d.h. der Menge der “Schemata” $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_i \in \mathbb{R}$. Alle Operationen elementweise, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Elemente eines Vektorraums werden häufig durch “kleine Buchstaben” $a, b (\in V)$, insbesondere mit r für Ortsvektor, v für Geschwindigkeitsvektor, gekennzeichnet. Evtl. mit Pfeil \vec{r}, \vec{v} oder auch $\underline{r}, \underline{v}$.

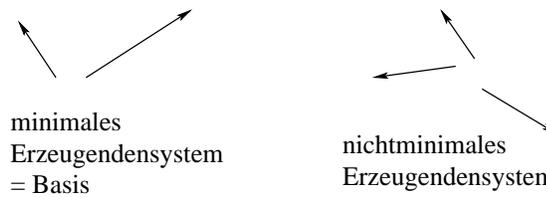
Bemerkung: Unser dreidimensionaler Raum ist Vektorraum, Ebenen im dreidimensionalen Raum sind zweidimensionale Unter-Vektorräume. Die Erdoberfläche ist kein Vektorraum! (Warum?)

Definition: Basis, Dimension, Lineare (Un-) Abhängigkeit

Ein Vektorraum V heißt endlichdimensional, wenn es endlich viele Vektoren v_1, \dots, v_n gibt, die V aufspannen in dem Sinne, daß zu jedem $v \in V$ (reelle) Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ existieren, so daß $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Jedes Erzeugendensystem v_1, \dots, v_n mit minimaler Anzahl n heißt Basis, n ist die “Dimension” von V . Eine Basis besteht aus linear unabhängigen Vektoren, d.h. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ ist nur lösbar mit $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Geometrisches Beispiel Erzeugendensysteme in der Ebene



Insbesondere ist die Ebene zweidimensional.

Bemerkung: Durch Auszeichnung einer Basis erfolgt die Darstellung von Vektoren irgendeines auch abstrakten Vektorraumes (Menge der Polynome ...) in n -Tupeln. Die Elemente des n -Tupels werden die Komponenten oder Koordinaten eines Vektors genannt. Mit anderen Worten: jeder n -dimensionale Vektorraum ist durch \mathbb{R}^n darstellbar.

Beispiel: Basiswechsel bzw. Koordinaten eines Vektors bzgl. neuer Basis
 Wenn wir e_1, e_2 und e_3 über

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

eingeführen, gilt z.B.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -e_1 + 3 \cdot e_2 - 3 \cdot e_3. \tag{2.6}$$

Wir können den Vektor aber auch bezgl. einer anderen Basis, z.B.

$$e'_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

darstellen

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = e'_1 + 2 \cdot e'_2 - e'_3 =: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}'. \tag{2.8}$$

Lehre: Komponenten- bzw. Tupel-Darstellung ist immer basisabhängig!

Frage: Gibt es eine ausgezeichnete Basis? Antwort: Nein.

Frage: Gibt es ausgezeichneten Typ von Basis? Antwort: mit Zusatzstruktur ja.

Definition: Skalarprodukt (Inneres Produkt)

Positiv definite, symmetrische bilineare Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus $V \times V$ in \mathbb{R} , d.h. für $v_1, v_2, v \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle \lambda v_1 + \mu v_2, v \rangle &= \lambda \langle v_1, v \rangle + \mu \langle v_2, v \rangle \\ \langle v, v \rangle &\geq 0, \quad \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Beispiel: Standard-Skalarprodukt Für n -Tupel $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.10)$$

Bemerkung:

Für $\vec{v}, \vec{w} \in V$ schreibt man auch $\vec{v} \cdot \vec{w}$ anstelle $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Der Winkel Θ zwischen zwei Vektoren \vec{v}, \vec{w} , ist def. durch $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \Theta$. Falls $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ bzw. $\Theta = \pi/2$ heißen die Vektoren orthogonal.

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0, \quad (2.11)$$

unter anderem bedeutet dies, daß die beiden Vektoren des letzten Falls orthogonal zueinander sind.

Definition: Die "Norm" (Länge, Betrag) $|v|$ eines Vektors v ist durch $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ definiert.

Beispiel für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist $|v| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

Wir werden häufig die Beträge von Ortsvektoren \vec{r} und Geschwindigkeitsvektoren \vec{v} durch r und v bezeichnen.

Zu einem vorgegebenen Vektor \vec{r} definieren wir den "Einheitsvektor \hat{r} in Richtung \vec{r} " durch

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.12)$$

Frage: Gibt es nur ein Skalarprodukt? Antwort: Nein! Siehe folgendes Beispiel.

Beispiel: Ist im \mathbb{R}^2 folgende Form ein Skalarprodukt?

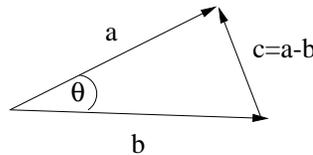
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2 \quad (2.13)$$

Antwort: Ja. Symmetrie, Bilinearität, positive Definitheit: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2$.

Beispiel: Anwendung des Skalarproduktes (Cos-Satz)

Die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ definieren die Seiten eines Dreiecks. Es gilt $\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$, woraus folgt

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \Theta_{a,b} = c^2 \tag{2.14}$$



Definition: Euklidischer Raum, Orthonormale Basis

Ein euklidischer Vektorraum ist ein Vektorraum ausgestattet mit einem Skalarprodukt. Eine orthonormale Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ ist wie oben definiert mit der zusätzlichen Eigenschaft $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{i,j}$, d.h. gleich 1 für $i = j$ und 0 sonst.

Bemerkung: Nach Auszeichnung einer orthonormalen Basis und Darstellung von Vektoren durch n -Tupel bzgl. dieser Basis nimmt das Skalarprodukt von $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \in V$ folgende Form an: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_i y_i$, wobei in der letzten Notation die "Einsteinsche Summenkonvention" benutzt wurde.

2.2 Lineare Abbildungen

Wir wollen uns mit speziellen (einfachen) Abbildungen befassen wie: Koordinatentransformationen, Drehungen usw. Diese Operationen wollen wir zunächst abstrakt einführen und dann nach Auszeichnung einer Basis bzw. eines Koordinatensystems mittels Matrizen.

Definition: Lineare Abbildung

Seien zwei Vektorräume V , W gegeben. Eine Abbildung $A : V \rightarrow W$ heißt linear, wenn für $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$A(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda A v_1 + \mu A v_2 \tag{2.15}$$

Hier ist die übliche verkürzte Notation $Av = A(v)$ für lineare Abbildungen benutzt worden. Beachte: V und W können unterschiedlich dimensional sein.

Die Menge aller linearen Abbildungen $V \rightarrow W$ bildet selbst einen linearen Raum (Vektorraum). Dabei ist die Summe zweier Abbildungen A und B definiert durch die Wirkung auf ein beliebiges $v \in V$

$$(A + B)v = Av + Bv \tag{2.16}$$

Analog ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abbildung λA definiert, d.h. $(\lambda A)v = \lambda(Av)$.

Definition: Komposition

Die Komposition oder Verkettung AB von linearen Abbildungen $B : V \rightarrow V'$ $A : V' \rightarrow V''$ ist durch die Wirkung auf ein beliebiges $v \in V$ definiert

$$(AB)v = A(Bv) \tag{2.17}$$

Bemerkung: Die Komposition von linearen Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung. Beachte: im allgemeinen macht nur AB (wie oben) Sinn, nicht jedoch BA . Warum? Beachte: Falls

$V = V' = V''$, sind BA und AB definiert, aber im allgemeinen gilt $BA \neq AB$.

Nun folgt die konkrete Darstellung von linearen Abbildungen mittels Matrizen.

Definition: Matrizen

Ein ‘‘Rechteckschema’’ $(A_{i,j})_{\substack{i=1,r \\ j=1,s}}$ mit $r \cdot s$ -vielen Zahlen $A_{i,j}$ heißt $r \times s$ -Matrix. Beispiel einer 3×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Die Indizes i und j heißen Zeilen- und Spalten-Index.

Beispiel: Einheitsmatrix, Kronecker-Delta für quadratische Matrizen

Für $r = s = 3$ (allg. Fall offensichtlich)

$$(\delta_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (2.19)$$

Beispiel: Drehmatrix $D(\phi)$

Im zweidimensionalen werden Drehungen um einen Winkel ϕ durch eine 2×2 -Matrix

$$D(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{Diagramm einer 2D-Drehung um den Winkel } \phi \text{ im Uhrzeigersinn.} \\ \text{Ein Vektor wird von der positiven x-Achse um den Winkel } \phi \text{ gedreht.} \\ \text{Ein weiterer Vektor ist um } \phi \text{ gegen den Uhrzeigersinn von der positiven y-Achse gedreht.} \end{array} \quad (2.20)$$

beschrieben.

Warum diese Matrix eine Drehung beschreibt, können Sie aber erst verstehen, wenn die Anwendung einer Matrix auf einen Spaltenvektor erklärt wird. Diese Operation liefert wieder einen Spaltenvektor. Im Detail:

Eine $r \times s$ -Matrix A kann auf einen Spaltenvektor \vec{x} der ‘‘Höhe’’ s angewendet werden und liefert einen Spaltenvektor \vec{y} der ‘‘Höhe’’ r , wobei die i -te Koordinate von \vec{y} gegeben ist durch:

$$y_i := A_{i,1} * x_1 + A_{i,2} * x_2 + \dots + A_{i,s} * x_s = \sum_{j=1}^s A_{i,j} x_j. \quad (2.21)$$

In Worten: der Eintrag von \vec{y} an Position i ergibt sich als Skalarprodukt des i -ten Zeilenvektors von A mit dem Spaltenvektor \vec{x} .

Beispiel: Anwendung von $D(\phi)$ auf 2-Tupel $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$D(\phi)\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \phi) x_1 - (\sin \phi) x_2 \\ (\sin \phi) x_1 + (\cos \phi) x_2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Wenn Sie $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen, erhalten Sie als Bild $\vec{y} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$; für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten Sie $\vec{y} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$. Dies sind gerade – wie gewünscht– die in der Skizze eingetragenen Vektoren.

Das Verketteten von linearen Abbildungen wird mittels Matrizen durchgeführt als Matrixprodukt.

Definition: Produkt zweier Matrizen

Seien A und B Matrizen mit Dimension $r \times s$ und $s \times t$, dann ist das Produkt AB definiert als $r \times t$ -Schema, wobei das (i, k) -te Element gegeben ist durch

$$(AB)_{i,k} = \sum_{j=1,s} A_{i,j} B_{j,k} (= A_{i,j} B_{j,k}) \quad (2.23)$$

Bemerkung:

(i) Das Produkt zweier Matrizen ist genau dann definiert, wenn die Zeilenvektoren der linken Matrix gleich lang sind wie die Spaltenvektoren der rechten Matrix hoch.

(ii) Das (i, j) -te Element der Ergebnismatrix ist gleich dem Skalarprodukt des i -ten Zeilenvektors der linken Matrix mit dem j -ten Spaltenvektor der rechten Matrix.

(iii) Der j -te Spaltenvektor der Ergebnismatrix ist gegeben durch Anwenden der linken Matrix auf den j -ten Spaltenvektor der rechten Matrix.

Beispiel:

(i)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & 4a-b \\ 3c+d & 4c-d \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

(iii) Produkt zweier Drehmatrizen $D(\phi)$ und $D(\theta)$ in 2 Dimensionen

$$\begin{aligned} D(\phi)D(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta & -(\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta) \\ \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dieses Ergebnis sollte mit der Drehung um den Winkel $\phi + \theta$, also

$$D(\phi + \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) & -\sin(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) & \cos(\phi + \theta) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

übereinstimmen. Daraus folgen die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta &= \sin(\phi + \theta) \\ \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta &= \cos(\phi + \theta) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Beachte: Das Produkt von mehr als zwei Matrizen ist in analoger Weise definiert und es gelten

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B+C) = AB+AC, \quad AB \neq BA \text{ (im allgemeinen)} \quad (2.29)$$

Resümee: Das Produkt einer $r \times s$ -Matrix mit einem s -Tupel ist definiert im obigen Sinne, wobei das s -Tupel als $s \times 1$ -Matrix verstanden wird: (2.21) ist Spezialfall von (2.23).

Definition: Transposition, Inverse

Für jede $r \times s$ Matrix A wird eine $s \times r$ Matrix A^T durch $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$ definiert. Die Inverse einer Matrix A (nur im quadratischen Fall) wird durch A^{-1} bezeichnet und erfüllt $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Falls eine Inverse zu A existiert, heißt A regulär bzw. invertierbar, andernfalls singulär.

Falls die Inverse einer quadratischen Matrix A existiert, läßt sich ein Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{d}$ (mit vorgegebenen A , \vec{d} und gesuchtem \vec{x}) eindeutig lösen:

$$A\vec{x} = \vec{d} \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I}\vec{x} = A^{-1}\vec{d} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{d} \quad (2.30)$$

Die Frage, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht, läßt sich am einfachsten mittels der Determinante entscheiden: Genau dann, wenn A invertierbar ist, ist $\det(A) \neq 0$. Die Determinante ist definiert durch:

Definition: Determinante von quadratischen Matrizen und linearen Abbildungen $V \in V$ (“alternierende Multilinearformen der Spaltenvektoren”)

Definition für 2×2 und 3×3 -Matrizen

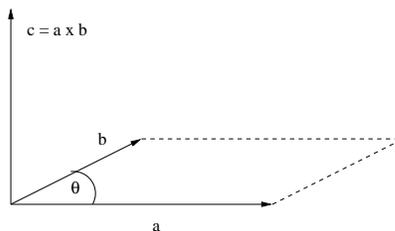
$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (2.31)$$

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

Definition: Kreuzprodukt (im 3-dim euklidischen Raum)

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} in \mathbb{R}^3 ist definiert als der Vektor \vec{c} , der

- (i) orthogonal zu \vec{a} und \vec{b} steht,
- (ii) dessen Länge c dem Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms entspricht ($= ab \sin \Theta_{a,b}$), und
- (iii) dessen Vorzeichen sich aus der “Rechte-Hand-Regel” ergibt: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} sind zueinander wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand angeordnet.
(Bem.: Hier ist $\Theta_{a,b}$ immer zwischen 0 und π zu wählen.)



In Formeln (bzgl. orientierter Orthonormalbasis)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Beachte: aus der ersten Komponente ergeben sich die restlichen durch zyklisches Vertauschen. Das Kreuzprodukt von höherdimensionalen Vektoren ist nicht definiert. (Tatsächlich werden Sie in der

Analysis im Zusammenhang von alternierenden Multilinearformen auch das allg. Kreuzprodukt kennenlernen. Dieses bildet jedoch im allg. nicht zwei n -dim. Vektoren auf einen weiteren n -Vektor ab!)

Zerlegungssatz etc.:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\
 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\
 (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})]\vec{c} - [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]\vec{d} \\
 \vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] &= (\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \times \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Definition: Spatprodukt

Für drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} aus dem 3-dim eukl. Raum definieren wir das Spatprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \tag{2.35}$$

Bemerkung: Das Spatprodukt liefert das Volumen des Parallelepipeds, das durch die drei Vektoren aufgespannt wird. Die Verallgemeinerung auf n -Dimensionen ist klar!?

Wir merken die allgemeine Definition von orthogonalen Matrizen und Drehmatrizen an:

Definition: Orthogonale Matrizen sind genau diejenigen (quadratischen) Matrizen A , deren Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind und jeweils die Länge 1 haben, d.h.

$$A^T \cdot A = I \tag{2.36}$$

Beispiel: Drehung um y -Achse um Winkel ϕ sowie kombinierte Drehspiegelung

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

Bemerkung: : Aus den Rechenregeln für Determinanten

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B), \quad \det(A^T) = \det(A) \tag{2.38}$$

folgt sofort $(\det A)^2 = 1$, also $\det A = \pm 1$.

Orthogonale Matrizen bilden insbes. je zwei orthogonale Spaltenvektoren auf wiederum orthogonale Spaltenvektoren ab. Orthogonale Matrizen können Drehungen oder Spiegelungen oder Kombinationen davon sein.

Reine Drehmatrizen sind orthogonale Matrizen mit Determinante $+1$.

Lösen von Gleichungssystemen und Berechnung inverser Matrizen

Mittels Gauß-Jordan-Verfahren bzw. Zeilenoperationen von Matrizen: Multiplizieren von Zeilen mit Zahlen ($\neq 0$), Addition von Zeilen, Vertauschen von Zeilen mit Ziel, die Koeffizientenmatrix auf Einheitsform zu bringen.

Man kann derartige Gleichungssysteme ($A \cdot \vec{x} = \vec{d}$) mittels Gaußschem Verfahren in "voller Schönheit" bearbeiten, oder in einem reduzierten Schema, in dem die (quadratische) Koeffizientenmatrix A durch eine weitere rechte Spalte aus dem Vektor \vec{d} ergänzt wird und auf diese Matrix die (üblichen) Zeilenoperationen angewendet werden.

Beispiel: Ausführliches Gleichungssystem reduziertes Schema

$$\begin{array}{l}
6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 6 \\
3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 13 \\
2x_1 - 6x_2 + 0 = -10 \\
x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\
3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 13 \\
2x_1 - 6x_2 + 0 = -10 \\
x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\
0 + x_2 + 2x_3 = 10 \\
0 - 2x_2 - 2x_3 = -12 \\
x_1 + 0 + 5x_3 = 21 \\
0 + x_2 + 2x_3 = 10 \\
0 + 0 + 2x_3 = 8 \\
x_1 + 0 + 5x_3 = 21 \\
0 + x_2 + 2x_3 = 10 \\
0 + 0 + x_3 = 4 \\
x_1 + 0 + 0 = 1 \\
0 + x_2 + 0 = 2 \\
0 + 0 + x_3 = 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{cccc} 6 & -12 & 6 & 6 \end{array} \right) : 6 \\
\left(\begin{array}{cccc} 3 & -5 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & 0 & -10 \end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & 0 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3 \times \text{1. Zeile} \\ -2 \times \text{1. Zeile} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} +2 \times \text{2. Zeile} \\ +2 \times \text{2. Zeile} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) : 2 \\
\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} -5 \times \text{3. Zeile} \\ -2 \times \text{3. Zeile} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)
\end{array}
\quad (2.39)$$

Inverse der Koeffizientenmatrix A : Hier wird eine Matrix $(A|I)$ aus der Koeffizientenmatrix A und der Einheitsmatrix I aufgestellt und die gleichen Zeilenoperationen ausgeführt wie gehabt: Ziel ist, die linke Hälfte auf I -Gestalt zu bringen. Dann ist die rechte Seite identisch mit A^{-1} .

$$\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{cccccc} 6 & -12 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : 6 \\
\left(\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & 1/6 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3 \times \text{1. Zeile} \\ -2 \times \text{1. Zeile} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 1 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1/3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +2 \times \text{2. Zeile} \\ +2 \times \text{2. Zeile} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 5 & -5/6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4/3 & 2 & 1 \end{array} \right) : 2 \\
\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 5 & -5/6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 1/2 \end{array} \right) \begin{array}{l} -5 \times \text{3. Zeile} \\ -2 \times \text{3. Zeile} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -3 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 1/2 \end{array} \right)
\end{array}
\quad (2.40)$$

Rechts befindet sich nun die Inverse A^{-1} . Anwendung auf rechte Seite des obigen konkreten Gleichungssystems liefert den Vektor $(1, 2, 4)$ wie gehabt. Aber nun kann die Lösung eines jede Gleichungssystems mit gleicher Koeffizientenmatrix direkt angegeben werden.

Resümee: Matrizen finden große Bedeutung als Koordinatendarstellung von linearen Abbildungen wie folgt: sei $A : V \rightarrow V'$ eine lineare Abbildung wie oben und e_1, \dots, e_s eine Basis von V und e'_1, \dots, e'_r eine Basis von V' . Sei $A_{i,j}$ definiert als die i -te Komponente von Ae_j bzgl. e'_1, \dots, e'_r , d.h.

$$Ae_j = \sum_{i=1}^r A_{i,j}e'_i \quad (2.41)$$

Sei nun $v \in V$ und das s -Tupel $\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_s \end{pmatrix}$ eine Koordinatendarstellung von v . Dann ist $\sum_{j=1}^s A_{i,j}v_j$ die i -te Komponente von Av , denn

$$Av = A \sum_{j=1}^s v_j e_j = \sum_{j=1}^s v_j A e_j = \sum_{j=1}^s v_j \sum_{i=1}^r A_{i,j} e'_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^s A_{i,j} v_j \right) e'_i \quad (2.42)$$

Die gesamte lineare Algebra kann damit auf Matrizen-Manipulationen reduziert werden!

Schlußbemerkung: Wir haben den Schnelldurchgang der linearen Algebra an den üblichen Aufbau der Mathematik gehalten. Der Grund war letztendlich physikalischer Natur: wir haben Vektoren und lineare Abbildungen eingeführt, wobei Vektoren physikalische Observable kodieren und Abbildungen Zusammenhänge ausdrücken. Wir haben dann n -Tupel und Matrizen als Koordinatendarstellungen von Vektoren und lin. Abbildungen eingeführt ohne weitere Kommentare.

Vielfach (insbes. in der älteren Literatur) findet man einen Aufbau, der von Beginn an n -Tupel und Matrizen in den Mittelpunkt stellt. Der physikalische Gehalt (Unabhängigkeit von speziellen Koordinaten bzw. Basen) wird dann durch Formulierungen ausgedrückt wie *ein Vektor ist ein Zahlentripel, das sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems so transformiert wie die Komponenten des Ortsvektors* etc. Diese obskure Beschreibung ist bei uns überflüssig.

Ausblick: Durch einen geeigneten Aufbau können Zahlen (Skalare), Vektoren und lineare Abbildungen als Tensoren 0., 1. und 2. Stufe erklärt werden. Natürlich gibt es Tensoren n . Stufe, die als multilineare Abbildungen eines Raumes $V_1 \times \dots \times V_n$ in \mathbb{R} definiert sind, oder in Koordinatendarstellung als Zahlenschemata mit n Indizes.

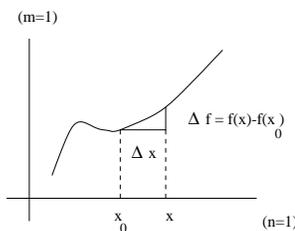
3 Differentialrechnung

Wir wollen Funktionen $f : V \rightarrow R^m$ betrachten, wobei V gleich R^n ist oder eine Untermenge davon. Sei ferner x_0 ein Punkt aus V .

Definition: f heißt differenzierbar (ableitbar) in x_0 , wenn $f(x) - f(x_0)$ bei x_0 durch eine lineare Abbildung A approximiert werden kann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0 \quad (3.1)$$

Bemerkung: Falls wir es mit skalaren Funktionen zu tun haben ($n = m = 1$) und auch allgemein



für $n = 1$ kann die bekannte Formel für den Differenzenquotienten formuliert werden. In diesem Fall ist A einfach durch die Steigung der Tangente an die Funktion f gegeben.

Im allgemeinen heißt die lineare Abbildung A das *Differential* (Ableitung) von f in x_0 und wird dann mit df gekennzeichnet.

Durch diese Definition wird einer Funktion f eine neue Funktion zugeordnet überall dort, wo die Ableitung definiert ist. Für $n = 1$ wird die neue Funktion f' oder $\frac{df}{dx}$ genannt und liefert die Werte der Tangentensteigung. Für den allgemeinen Fall wird df definiert, wir werden noch andere Notationen kennenlernen.

Beispiel: Ableitungen von speziellen Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n &= nx^{n-1} \\ \frac{d}{dx} e^x &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x \\ \frac{d}{dx} \ln x &= \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx} \sin x &= \cos x \\ \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \\ \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x \\ \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x \end{aligned} \quad (3.2)$$

Rechenregeln: Produkt-, Quotienten-, Ketten-Regel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] &= f'(x) + g'(x) \\ \frac{d}{dx} [\lambda f(x)] &= \lambda f'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ \frac{d}{dx} f[g(x)] &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Beispiel: Ableitungen von Umkehrfunktionen

Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f , d.h. $f^{-1}(f(x)) = x$. Mit $y := f(x)$ (auch $x = f^{-1}(y)$) und Kettenregel folgt $(f^{-1})'(y)f'(x) = 1$, also

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \tag{3.4}$$

Leichter zu merken:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{3.5}$$

Anwendung: $f(x) = e^x = y$ und $f^{-1}(y) = \ln y = x$,

$$\frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \tag{3.6}$$

Bemerkung: 1. und 2. Ableitungen des Weges \vec{s} nach der Zeit t ergeben Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a}

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}}, \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \ddot{\vec{s}} \tag{3.7}$$

Die auf ein Teilchen mit Masse m wirkende Kraft \vec{F} , die zur Beschleunigung $\ddot{\vec{s}}$ führt ist $\vec{F} = m\ddot{\vec{s}}$.

Beispiel: Schraubenlinie im \mathbb{R}^3

Betrachtet werde der folgende Weg $\vec{s}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, vt)$, der eine Schraubenlinie mit Radius R um die z -Achse mit (Umlauf-) Winkelgeschwindigkeit ω und Driftgeschwindigkeit v entlang der z -Achse.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{s}} &= (-\omega R \sin \omega t, \omega R \cos \omega t, v) \\ \ddot{\vec{s}} &= -\omega^2 (R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Beispiel: Sei $\vec{r}(t)$ ein Vektor mit zeitlich konstantem Betrag (auf Sphäre), dann gilt

$$0 = \frac{d}{dt} r^2 = \frac{d}{dt} (\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)) = 2\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \tag{3.9}$$

Die Ableitung steht \perp auf dem Vektor! Wo ist dies bei der Schraubenlinie gegeben? (Bei " $\vec{r} = \dot{\vec{s}}$ ").

Bemerkung: Das Differential einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in einem Punkt (x_1, \dots, x_n) ist in Koordinatendarstellung durch eine $m \times n$ -Matrix (Jacobi-Matrix) gegeben, wobei der j -te Spaltenvektor durch die "partielle Ableitung" gegeben ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} := \left. \frac{df}{dx_j} \right|_{\substack{\text{alle } x_1, \dots, x_n \\ \text{bis auf } x_j \text{ fest}}} \tag{3.10}$$

Oder auch

$$\text{Jacobi-Matrix } \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \text{ ist Matrix mit Einträgen } \left. \frac{df_i}{dx_j} \right|_{\substack{\text{alle } x_1, \dots, x_n \\ \text{bis auf } x_j \text{ fest}}} \tag{3.11}$$

Beachte: für “praktische” Rechnungen ist hierdurch das allgemeine Differential auf die Ableitung von “skalaren Funktionen” einer “skalaren” Variablen zurückgeführt.

Viele der obigen Rechenregeln können auf den Fall n, m beliebig verallgemeinert werden. Für uns ist die Verkettung von Abbildungen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ wichtig

$$f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \text{ wobei } x \mapsto f(g(x)) \quad (3.12)$$

Das Differential von $f \circ g$ ist die Verkettung der einzelnen Differentiale $df \circ dg$, oder expliziter und im Detail mittels Jacobi-Matrizen

$$\left(\frac{\partial f \circ g}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{y=g(x)} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad (3.13)$$

wobei auf der rechten Seite y das Argument der Abbildung f sein soll, und zuerst die partiellen Ableitungen von f berechnet werden und danach $y = g(x)$ eingesetzt wird. Das Produkt auf der rechten Seite ist natürlich das oben eingeführte Matrixprodukt.

Beispiel: Gegeben sei die potentielle Energie eines Teilchens (mit Masse m) $U = U(\vec{r})$. Diese Teilchen möge sich auf einer Bahn $\vec{r}(t)$ bewegen (t ist die Zeit). Eine natrliche Frage lautet: “Was ist die aufgenommene Energie pro Zeiteinheit bzw. Leistung?”

Antwort:

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) = \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial U}{\partial r_1}, \frac{\partial U}{\partial r_2}, \frac{\partial U}{\partial r_3} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial t} \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} \\ \frac{\partial r_3}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Der Zeilenvektor auf der rechten Seite (als Spaltenvektor geschrieben) wird auch “Gradient” ∇ von U genannt, d.h.

$$\nabla U := \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r_1} \\ \frac{\partial U}{\partial r_2} \\ \frac{\partial U}{\partial r_3} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Der Spaltenvektor auf der rechten Seite von (3.14) ist natürlich die Geschwindigkeit \vec{v} des Teilchens. Also ist (3.14) äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) = \nabla U \cdot \vec{v} = -\vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.16)$$

wobei benutzt wurde, daß Kraft \vec{F} und Potential U wie

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (3.17)$$

zusammenhängen.

Definition: Höhere Ableitungen

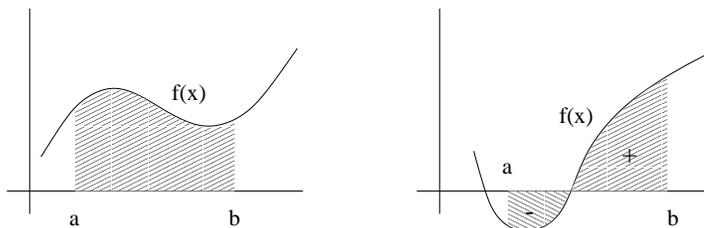
Durch $f^{(n)}$ wird die n . Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ gekennzeichnet, die rekursiv durch $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ definiert ist. Alternative Notation $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Definition: Stammfunktion

Sei $f(x)$ eine gegebene Funktion, dann heißt eine Funktion $F(x)$ Stammfunktion von f , wenn $F'(x) = f(x)$. Falls eine Stammfunktion existiert, gibt es unendlich viele, die sich alle nur durch eine Konstante unterscheiden.

4 Integralrechnung

Wir betrachten hier Funktionen f von \mathbb{R} in \mathbb{R} . Wir werden auch annehmen, daß derartige Funktionen hinreichend “regulär” sind, d.h. im wesentlichen stetig. Derartige Funktionen können durch Treppenfunktionen (stückweise konstant) approximiert werden. Über diesen Umweg kann in naheliegender Weise das Integral $\int_a^b f(t)dt$ als Fläche unter dem Graphen zwischen den Argumenten a und b definiert werden.



In der Mathematik werden Sie einen allgemeineren Integralbegriff kennenlernen, den des Riemann- und vor allem des Lebesgue-Integrals, die auch für nicht-stetige Funktionen erklärt sind.

Wir wollen uns nicht mit Details der Existenz und Eindeutigkeit beschäftigen, sondern direkt den Fundamentalsatz der Analysis:

- (i) Jede stetige Funktion $f(x)$ hat eine Stammfunktion, nämlich das Integral $\int_a^x f(t)dt$.
- (ii) Ist F eine beliebige Stammfunktion, so ist das Integral von f gegeben durch $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Bemerkung: Wir können nicht einen vollständigen Beweis liefern. Zur Einsicht in die allg. Zusammenhänge ist jedoch folgender Physikerbeweis instruktiv.

(a) Wir überlegen zunächst daß für a, b, c aus dem Definitionsbereich einer integrierbaren Funktion f gilt

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt, \quad (4.18)$$

diese Beziehung gilt auch, wenn in einem der Integrale die “untere Grenze $>$ obere Grenze” gilt, durch folgende Setzung

$$\int_a^b f(t)dt := - \int_b^a f(t)dt, \quad (a > b) \quad (4.19)$$

und offenbar $\int_a^a f(t)dt = 0$.

(b) Sei eine Funktion $g(x) := \int_a^x f(t)dt$ gegeben. Wir wollen den Differenzenquotienten berechnen

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt \simeq (x - x_0)f(x) \Rightarrow g'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(x), \quad (4.20)$$

damit ist g eine Stammfunktion von f wie behauptet. Aus dem Physikerbeweis wird ein Mathematikerbeweis, wenn der Mittelwertsatz benutzt wird und oben im Differenzenquotienten $f(x)$ durch $f(x_m)$ ersetzt wird, wobei sich x_m zwischen x_0 und x befindet und statt \simeq dann $=$ geschrieben werden kann.

Beispiel:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$$

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) \Big|_a^b = \arctan(b) - \arctan(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad (4.21)$$

Bemerkung: Im letzten Beispiel wurde ein “uneigentliches Integral” als Grenzprozeß eines “bestimmten Integrals” berechnet.

In der Praxis läuft die Berechnung des Integrals auf das Aufsuchen der Stammfunktion hinaus. Im Gegensatz zum Differenzieren, wobei “jede Kombination von elementaren Funktionen” abgeleitet werden kann, stellt man häufig fest, daß das Integral selbst von “einfachen Funktionen” nicht in “geschlossener Weise” angegeben werden kann. Ausnahmen:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \quad (+C)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \text{ oder } -\arccos x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \tan \frac{x}{2}$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x$$

$$\int \tan x dx = -\ln \cos x$$

$$\int \coth x dx = \ln \sinh x$$

$$\int \cot x dx = \ln \sin x$$

$$\int \frac{1}{\sinh x} dx = \ln \tanh \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{coth} x$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x \quad (4.22)$$

Rechenregeln

$$\int_a^b [f_1(t) \pm f_2(t)] dt = \int_a^b f_1(t) dt \pm \int_a^b f_2(t) dt \quad (4.23)$$

$$\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad \frac{d}{dx} \int_x^a f(t) dt = -f(x) \quad (4.25)$$

Substitutionsregel

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \int_a^b f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt \quad (4.26)$$

Grund: Sei $F(x)$ die Stammfunktion zu $f(x)$, dann ist die linke Seite $F(x(b)) - F(x(a))$. Ferner ist $F(x(t))$ Stammfunktion zu $f(x(t)) \frac{dx}{dt}$ und damit ist die rechte Seite gleich $F(x(b)) - F(x(a))$ und die Identität bewiesen.

Beispiel:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt \quad (4.27)$$

Partielle Integration

$$\int_a^b \frac{df}{dx} g dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f \frac{dg}{dx} dx \quad (4.28)$$

Grund: Nach Produktregel der Differentialrechnung sind die Ableitungen beider Seiten, betrachtet als Funktionen von b , identisch. Ferner liefern beide Seiten für $b = a$ das Ergebnis 0. Damit gilt Gleichheit für alle b .

Beispiel:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \sin(t) \cos(t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin^2(t)) dt \quad (4.29)$$

Es folgt $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t) dt$. Da $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, folgt $2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt = \pi$ und ferner $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \pi/2$.

Logarithmische Integration (Anwendung der Substitutionsregel mit $f(x) \rightarrow 1/x$ und $x(y) \rightarrow f(y)$)

$$\int_a^b \frac{f'(y)}{f(y)} dy = \ln f(y) \Big|_a^b \quad (4.30)$$

Wegintegrale

Wir wollen uns mit der Newton'schen Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$ in drei (beliebigen) Dimensionen befassen: Bahnkurve eines Teilchens unter dem Einfluß einer ortsabhängigen Kraft $\vec{F}(\vec{r})$. (Achtung: es gibt auch geschwindigkeitsabhängige Kräfte!) Hier ist \vec{F} eine Funktion, die für Vektoren \vec{r} aus dem \mathbb{R}^3 (oder einem Teil) definiert ist. Dies ist ein Beispiel einer vektorwertigen Funktion und wird *Vektorfeld*, im konkreten Fall *Kraftfeld* genannt.

Die erste Frage, die wir uns stellen, ist: welches ist die am Teilchen auf der Bahn $\vec{r}(t)$ geleistete Arbeit? Dies führt uns –definitionsgemäß– auf das Weg- oder Kurvenintegral:

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} dt \quad (4.31)$$

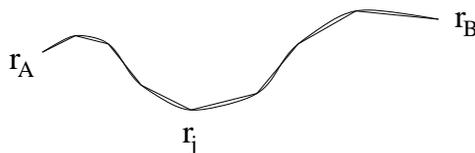
wobei $\vec{r}_{A,B} = \vec{r}(t_{A,B})$.

Motivation: Der Weg sei in kleine Stücke zerlegt mit zugehörigen Zeiten $t_A = t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_B$ und Raumpunkten $\vec{r}(t_j) =: \vec{r}_j$. Dann ist die zwischen den Zeiten t_j und t_{j+1} geleistete Arbeit (approximativ)

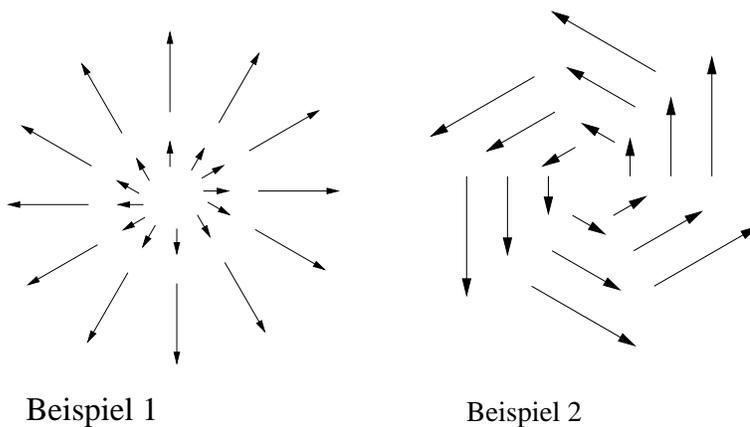
$$\Delta W_j = \vec{F}(\vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j) \quad (4.32)$$

wobei durch das Skalarprodukt “ \cdot ” gewährleistet ist, daß die Parallelkomponente der Kraft mit dem Weg multipliziert wird. Im Limes $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \Delta W_j &= \sum_{j=1}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}(t_j)) \cdot \dot{\vec{r}}(t_j) \Delta(t_j) \rightarrow \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} dt \end{aligned} \quad (4.33)$$



Beispiel 1: Sei $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ gegeben (radialsymmetrisch). Der Massenpunkt m durchlaufe folgende



Bahn (nicht notwendigerweise gemäß Newton) $\vec{r}_1(t) = (t, t, t)$, die von Zeit $t = 0$ bis $t = 1$ verfolgt wird. In dieser Zeit wird folgende Arbeit geleistet

$$W_1 = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot \dot{\vec{r}}_1 dt = \int_0^1 (t, t, t) \cdot (1, 1, 1) dt = 3 \int_0^1 t dt = \frac{3}{2} t^2 \Big|_0^1 = 3/2 \quad (4.34)$$

Wir können andere Wege von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$ betrachten, z.B. $\vec{r}_2(t) = (t/2, t/2, t^2/4)$, mit Anfangs- und Endzeitpunkt 0 und 2

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^2 \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot \dot{\vec{r}}_2 dt = \int_0^2 (t/2, t/2, t^2/4) \cdot (1/2, 1/2, t/2) dt \\ &= \int_0^2 (t/2 + t^3/8) dt = (t^2/4 + t^4/32) \Big|_0^2 = 1 + 1/2 = 3/2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Beide Wege (mit identischen Anfangs- und Endpunkten) liefern identische Ergebnisse.

Bemerkung: Wir haben oben eine Notation für Kurvenintegrale benutzt, die explizit eine Parametrisierung des Weges $\vec{r}(t)$ benutzte. Häufig wird auch einfach

$$\int_c \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (4.36)$$

geschrieben, wobei mit $c : t \rightarrow \vec{r}(t)$ die Kurve bzw. *Contour* spezifiziert wird. Oft wird auch “.” in der Notation fallengelassen: $\int_c \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$. Wir werden jetzt ein Beispiel mit Weg- (Contour)-abhängigen Integralen kennenlernen.

Beispiel 2: Sei $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ ein 2-dim Kraftfeld auf einer 2-dim Geometrie. Wir wollen den Kreisweg $\vec{r}_1(t) = R(\cos t, \sin t)$ in der Zeit von 0 bis 2π und Anfangs- gleich Endpunkt $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_1(2\pi) = (R, 0)$ betrachten. Außerdem wollen wir den trivialen Weg $\vec{r}_2(t) = (R, 0)$ für alle t betrachten.

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot \dot{\vec{r}}_1 dt = \int_0^{2\pi} (-R \sin t, R \cos t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2 \\ W_2 &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot \dot{\vec{r}}_2 dt = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Integrale sind nicht gleich!

Definition: Ein Kraftfeld \vec{F} für das alle Integrationswege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten denselben Wert des Wegintegrals liefern wird *konservativ* genannt. Insbes. geschlossene Wege liefern 0. Grund für Terminologie: in konservativen Kraftfeldern gilt Energieerhaltung (genaueres später). Wir haben oben ein Beispiel eines nichtkonservativen Feldes gesehen. In einem derartigen Feld kann ein Prozeß durchgeführt werden mit Energiegewinn und Restaurierung des Anfangszustandes.

Potential

Charakterisierung:

Konservative Felder sind genau solche, die ein Potential besitzen.

Definition: Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Feld, dann heißt $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Potential zu \vec{F} , wenn gilt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (4.38)$$

wobei $\vec{\nabla}U$, “Nabla U ”, der Gradient von U ist, definiert als der Spaltenvektor des Differentials zu U , konkret der Spaltenvektor aus allen partiellen Ableitungen

$$\vec{\nabla}U := \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Offenbar sind Potentiale (sofern sie überhaupt existieren) nur bis auf eine additive Konstante definiert.

Beispiel: Das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ wie oben hat das Potential $U(\vec{r}) = -\frac{1}{2}r^2$, denn

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -x_j \quad (4.40)$$

(A) Wir zeigen nun: jedes Feld der Gestalt $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ ist konservativ!

Beweis: Wir haben die Kettenregel für höherdimensionale Funktionen $d(f \circ g) = df \circ dg$

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla}U(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad (4.41)$$

Daher folgt für das Wegintegral

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} dt &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}(-U(\vec{r})) dt \\ &= U(\vec{r}(t_A)) - U(\vec{r}(t_B)) \end{aligned} \quad (4.42)$$

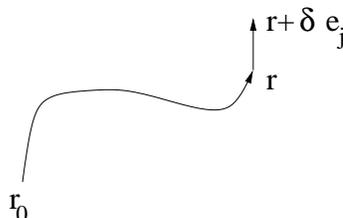
(B) Nun wollen wir zeigen, daß für jede konservative Kraft ein Potential existiert. Idee: definiere zu \vec{F} eine Funktion U , die obige Beziehung erfüllt. Zeichne irgendeinen Startpunkt \vec{r}_0 aus und integriere \vec{F} von \vec{r}_0 bis \vec{r} , dabei hängt das Ergebnis nicht von der konkreten Wahl des Weges ab (“Wohldefiniertheit”)

$$U(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (4.43)$$

Nun müssen wir zeigen $\vec{\nabla}U = -\vec{F}$. Wir wollen die partielle Ableitung nach x_j berechnen:

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{U(\vec{r} + \delta \cdot \vec{e}_j) - U(\vec{r})}{\delta} = -\frac{1}{\delta} \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \delta \cdot \vec{e}_j} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \simeq -\frac{F_j(\vec{r})\delta}{\delta} = -F_j(\vec{r}) \quad (4.44)$$

alles im Limes $\delta \rightarrow 0$ zu verstehen.



Bemerkung: Der Gradient gibt die Richtung und den Betrag des stärksten Anstiegs einer Funktion an.

Beispiel: Die Funktion $f(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$ mit konstantem Vektor \vec{a} hat Gradienten

$$\vec{\nabla}f(\vec{r}) = \vec{a} \quad (4.45)$$

da $\frac{\partial}{\partial x_j} f = a_j$.

Beispiel: Die Gravitationskraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (4.46)$$

hat als Potential

$$U(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r} \quad (4.47)$$

Ganz allgemein hat eine radialsymmetrische Kraft (Betrag nur abhängig vom Abstand, und Richtung radial bzgl. Aufpunkt)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \phi(r) \hat{r} \quad (4.48)$$

als Potential

$$U(\vec{r}) = -\Phi(r) \quad (4.49)$$

wobei $\Phi(r)$ eine Stammfunktion von $\phi(r)$ ist (im Sinne der Funktionen einer Veränderlichen).

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi(r) = \frac{d}{dr} \Phi(r) \frac{\partial}{\partial x_j} r(x_1, \dots, x_n) \quad (4.50)$$

Nun gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} r(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r} \quad (4.51)$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi(r) = \Phi'(r) \frac{x_j}{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \Phi(r) = \Phi'(r) \hat{r} \quad (4.52)$$

Elementare Rechenregeln des Gradienten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\phi + \psi) &= \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\psi \\ \vec{\nabla}(\phi\psi) &= \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi \end{aligned} \quad (4.53)$$

Bemerkung: Offenbar gilt für konservative Kraftfelder $F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} U \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} F_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} U = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} U = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j$, wobei benutzt wurde, daß partielle Ableitungen vertauscht werden können. Wir werden noch sehen, daß die Bedingung $\frac{\partial}{\partial x_j} F_i = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j$ nicht nur notwendig sondern (unter der Bedingung des “einfachen Zusammenhangs” des Definitionsbereichs) hinreichend für “konservativ” ist.

Bemerkung: Es gibt –wie schon gesagt– nicht-konservative und auch geschwindigkeitsabhängige Kraftfelder. Bei letzteren mag nicht nur eine andere Bahnkurve einen anderen Wert für das Integral liefern, sondern bei gleicher Bahnkurve schon andere Parametrisierung andere Ergebnisse.

5 Mehrdimensionale Integrale

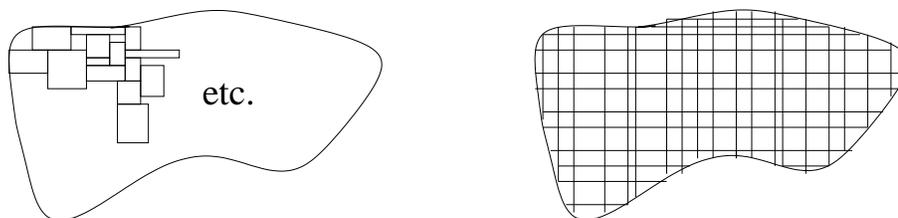
Wir wollen uns jetzt mit mehrdimensionalen Integralen beschäftigen. Diese werden uns häufig in der Physik begegnen, angefangen mit den Volumina ausgedehnter Körper, der Gesamtmasse, die im Falle inhomogener Dichten auf das Integral über die Dichtefunktion führt, etc.

Wir betrachten hier Funktionen f von \mathbb{R}^n in \mathbb{R} . Wir werden wieder annehmen, daß derartige Funktionen hinreichend “regulär” sind, d.h. im wesentlichen stetig. Derartige Funktionen können durch Stufenfunktionen (konstant auf “kleinen” n -dimensionalen Quadern) approximiert werden. Über diesen Umweg kann wieder in naheliegender Weise das Integral $\int_V f(\vec{r})d^n r$ der Funktion f über das n -dimensionale Volumen V definiert werden.

Wir wollen für den $n = 2$ -dimensionalen Fall konkreter sein. Das 2-dimensionale Volumen heißt natürlich Fläche und wird mit A bezeichnet.

$$\int_A f(\vec{r})d^2 r = \sum_i f(\vec{r}_i)\Delta A_i \quad (5.1)$$

im Limes immer feinerer Diskretisierung.



Wenn wir ein regelmäßiges Gitter unterlegen, können wir die Summation über zwei Indizes i, j durchführen, die die x - und y -Achsen separat diskretisieren

$$\int_A f(\vec{r})d^2 r = \sum_j \sum_k f(x_j, y_k)\Delta x_j \Delta y_k \quad (5.2)$$

Hier sehen wir, daß die Summe über k im Limes feinerer Diskretisierung gegen das Integral $\int dy$ über y bei festem x_j geht. Die Summe über j im Limes feinerer Diskretisierung gegen das Integral $\int dx$ über x . Das Endergebnis lautet

$$\int_A f(\vec{r})d^2 r = \int \left(\int f(x, y)dy \right) dx. \quad (5.3)$$

Das 2-dimensionale und allgemeiner das n -dimensionale Integral führt daher auf ein Mehrfachintegral, d.h. einer sukzessiven Auswertung von üblichen 1-dimensionalen Integralen.

Beispiel 1: $f : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konstant vom Wert 1 ($A = [0, a] \times [0, b]$)

$$\int_A f(\vec{r})d^2 r = \int_0^a \int_0^b 1 dy dx = \int_0^a b dx = ab \quad (5.4)$$

Das Ergebnis entspricht gerade der Fläche des rechteckigen Definitionsbereichs.

Beispiel 2: $f : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy + y^2$ ($A = [0, a] \times [0, b]$)

$$\begin{aligned} \int_A f(\vec{r})d^2 r &= \int_0^a \int_0^b (xy + y^2) dy dx \\ &= \int_0^a \left(x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b dx = \int_0^a \left(x \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{b^2}{4}x^2 + \frac{b^3}{3}x \right) \Big|_0^a = \frac{a^2b^2}{4} + \frac{ab^3}{3} \quad (5.5)$$

Beispiel 3: $f : [-R, R] \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |\vec{r}| \leq R \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.6)$$

also gleich 1 innerhalb der Kreisscheibe mit Radius R , 0 außerhalb. Das Integral über $A = [-R, R] \times [-R, R]$ wird definitionsgemäß den Flächeninhalt der Kreisscheibe liefern

$$\begin{aligned} \int_A f(\vec{r}) d^2r &= \int_{-R}^R \int_{-R}^R f(x, y) dy dx = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 dy dx \\ &= \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2-x^2} dx \\ &= 2R^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} ds = 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

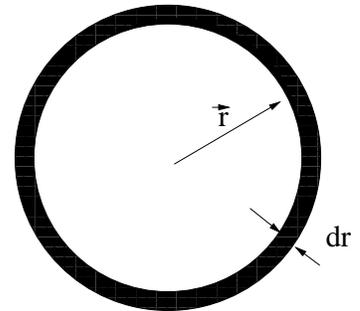
die (vor-)letzte Beziehung nach (4.20,22).

In dem letzten Beispiel wurde insbes. gezeigt, wie mit nicht-rechteckigen Geometrien verfahren wird.

Wichtige Spezialfälle:

Radialsymmetrie

Integration von Funktionen, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen, über Flächen (Volumina), deren Grenzen ebenfalls nur von r abhängen. Wir stellen uns jetzt vor, der Raum werde durch radialsymmetrische Schalen der Dicke dr überdeckt, d.h. durch in 2-Dimensionen durch Ringe vom Radius r und Fläche $2\pi r dr$ (in 3-Dimensionen Volumen $4\pi r^2 dr$).



Wir erhalten die Ersetzung

$$\begin{aligned} \int_{r \leq R} f(r) d^2r &= \int_0^R f(r) 2\pi r dr \\ \int_{r \leq R} f(r) d^3r &= \int_0^R f(r) 4\pi r^2 dr \end{aligned} \quad (5.8)$$

Beispiel: Wir rechnen schnell das Beispiel 3 von oben:

$$\int_A f(\vec{r}) d^2r = \int_0^R 1 \cdot 2\pi r dr = \pi r^2 \Big|_0^R = \pi R^2 \quad (5.9)$$

Faktorisierung

Wenn $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$, dann gilt für Integration über quaderförmige Volumina $V = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

$$\int_V f(\vec{r}) d^n r = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \cdot \dots \cdot \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n \quad (5.10)$$

Die Faktorisierung liegt selten vor. Wir werden bald Funktionen mit speziellen Symmetrien kennenlernen, die in geeigneten Koordinaten auf Faktorisierung hinauslaufen. Weiter unten konstruieren wir ein Beispiel, das uns die Berechnung des Gauß-Integrals erlaubt.

Spezielle Koordinatensysteme

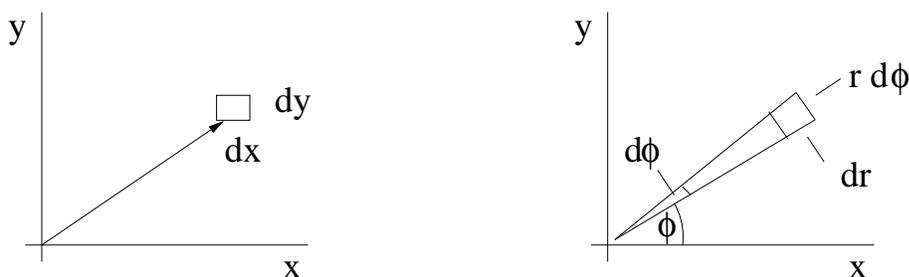
Wir haben schon den wichtigen Spezialfall der radialsymmetrischen Funktionen kennengelernt und eine Methode, das Mehrfachintegral auf ein einfaches 1–dimensionales Integral zurückzuführen. Manchmal zeigen Funktionen nur teilweise Symmetrien, die in geeigneten Koordinaten bzw. Parametrisierungen immer noch zu Vereinfachungen führen. Mathematisch entspricht die Einführung geeigneter Koordinaten zur Berechnung von Integralen einer höherdimensionalen Substitutionsregel.

2-Dim: Polarkoordinaten

Wir parametrisieren die beiden Koordinaten $\vec{r} = (x, y)$ durch

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, & \text{wobei } 0 \leq r < \infty, \\ y &= r \sin \phi, & 0 \leq \phi < 2\pi \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nun müssen wir uns Gedanken über das Volumen der Fläche machen, die von $\vec{r}(r, \phi)$ überstrichen wird, wenn r und ϕ um “kleine” dr und $d\phi$ variieren. Man mache sich an Hand der Skizzen klar, daß kleine Rechtecke mit Kantenlängen dr und $r d\phi$ aufgespannt werden, die eine Fläche $r dr d\phi$ haben.



Also gilt

$$\int f(x, y) dx dy = \int f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi \quad (5.12)$$

Beispiel 1: Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes der Kreisscheibe bzgl. der y -Achse werden Sie auf das Integral von x^2 über die Scheibe stoßen, d.h.

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{x^2+y^2} \leq R} x^2 dx dy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} (r \cos \phi)^2 r dr d\phi \\ &= \left(\int_0^R r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) = \frac{R^4}{4} \pi \end{aligned} \quad (5.13)$$

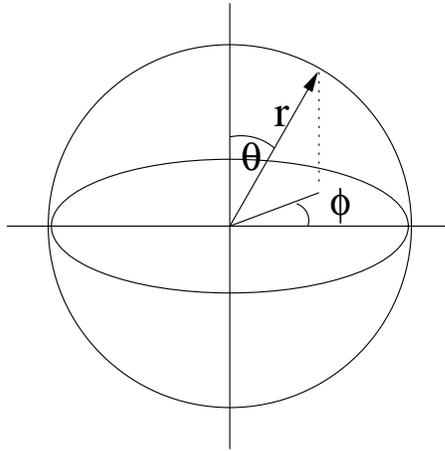
Machen Sie sich klar, daß die Vereinfachung darin bestand, daß in den neuen Koordinaten eine Faktorisierung vorliegt!

Beispiel 2: Wir hatten oben schon Funktionen behandelt, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen, wollen aber diesen Fall nochmals schnell in Polarkoordinaten abhandeln

$$\int_{r \leq R} f(r) d^2 r = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r) r dr d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R f(r) r dr = 2\pi \int_0^R f(r) r dr \quad (5.14)$$

3-Dim: Kugelkoordinaten

Wir parametrisieren die drei Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)$ mittels Abstand r , geographischer Länge (Azimut) $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und geographischer Breite (Polarwinkel) $0 \leq \theta \leq \pi$ durch



$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.15)$$

Nun müssen wir uns Gedanken über das Volumen der Fläche machen, die von $\vec{r}(r, \phi, \theta)$ überstrichen wird, wenn r , ϕ und θ um "kleine" dr , $d\phi$ und $d\theta$ variieren. Wie bei den Polarkoordinaten stehen die partiellen Ableitungen von $\vec{r}(r, \phi, \theta)$ nach r , ϕ und θ orthogonal aufeinander. Die Kantenlängen des infinitesimalen Quaders sind $dr \times r \sin \theta d\phi \times r d\theta$. Also ist das 3-dim. Volumenelement $d^3 r = \sin \theta dr d\phi r^2 d\theta$. Damit gilt für die Integration einer Funktion $f(\vec{r})$ über eine Kugel vom Radius R

$$\int f(\vec{r}) d^3 r = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \sin \theta dr d\phi r^2 d\theta \quad (5.16)$$

Im Vergleich zu den Polarkoordinaten ist die "Theta-Integration" hinzu gekommen. Hier kann häufig mit Gewinn von der Integrationsvariablen θ auf $\xi := \cos \theta$ transformiert werden

$$\int_0^\pi (\dots) \sin \theta d\theta = \int_1^{-1} (\dots) [-d(\cos \theta)] = \int_{-1}^1 (\dots) d\xi \quad (5.17)$$

Beispiel 3: Wir hatten oben schon Funktionen behandelt, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen, wollen aber diesen Fall nochmals schnell in Polarkoordinaten abhandeln

$$\int_{r \leq R} f(r) d^3 r = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r) \sin \theta dr d\phi r^2 d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^R f(r)r^2 dr \right) \left(\int_{-1}^1 d\xi \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \\
&= 4\pi \int_0^R f(r)r^2 dr
\end{aligned} \tag{5.18}$$

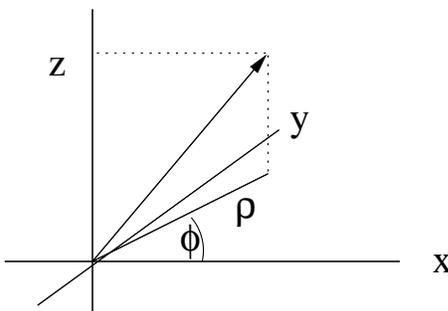
Beispiel 4: Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes einer homogenen Kugel bzgl. der z -Achse stoßen Sie auf das Integral

$$\begin{aligned}
\int_{r \leq R} (x^2 + y^2) d^3 r &= \int_{r \leq R} (r \sin \theta)^2 d^3 r \\
&= \left(\int_0^R r^2 r^2 dr \right) \left(\int_{-1}^1 \sin^2 \theta d \cos \theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \\
&= \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) d\xi = \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \left(\xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{5} V R^2
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Die Vereinfachung bei Benutzung der Kugelkoordinaten bestand darin, daß in den neuen Koordinaten eine Faktorisierung stattfand!

3-Dim: Zylinderkoordinaten

Wir parametrisieren die drei Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)$ mittels Abstand ρ von z - (Zylinder)-Achse, Winkel $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und Höhe z durch



$$\begin{aligned}
x &= \rho \cos \phi, \\
y &= \rho \sin \phi, \\
z &= z
\end{aligned} \tag{5.20}$$

In gewisser Weise haben wir hier eine Kombination der 2-dim. Polarkoordinaten und einer restlichen kartesischen Koordinate. Wie oben stehen die partiellen Ableitungen von $\vec{r}(\rho, \phi, z)$ nach ρ , ϕ und z orthogonal aufeinander. Die Kantenlängen des infinitesimalen Quaders sind $d\rho \times \rho d\phi \times dz$. Also ist das 3-dim. Volumenelement $d^3 r = (\rho d\rho)(d\phi)(dz)$. Damit gilt für die Integration einer Funktion $f(\vec{r})$ über einen Zylinder vom Radius R und Höhe H

$$\int f(\vec{r}) d^3 r = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \rho d\rho d\phi dz \tag{5.21}$$

Beispiel 5: Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes eines homogenen Zylinders bzgl. der z -Achse stoßen Sie auf das Integral

$$\int_{\text{Zylinder}} (x^2 + y^2) d^3 r = \int_{\text{Zylinder}} \rho^2 d^3 r = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^H dz$$

$$= 2\pi H \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi}{2} R^4 H = \frac{1}{2} V R^2 \quad (5.22)$$

Beispiel: Gaußintegral Integriere $f(\vec{r}) = \exp(-r^2)$ über die gesamte 2-dimensionale Ebene.

Berechnung als radialsymmetrisches Integral:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{r}) d^2 r = \int_0^\infty \exp(-r^2) \cdot 2\pi r dr = -\pi \exp(-r^2) \Big|_0^\infty = \pi \quad (5.23)$$

Berechnung als faktorisiertes Integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{r}) d^2 r &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dx dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^\infty \exp(-y^2) dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx \right)^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Konkreter geht an dieser Stelle die Auswertung nicht, da wir keinen elementaren Ausdruck für die Stammfunktion von $\exp(-x^2)$ haben. Aus der Gleichheit der Ergebnisse muß aber für das (uneigentliche) Integral folgen

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \quad (5.25)$$

Die beliebigdimensionale n -Sphäre

Wir wollen die frühere Überlegung auf den allgemeinen n -dimensionalen Fall ausdehnen. Wir gehen aus von dem bekannten Integral (5.25) und fragen uns, wie groß die Oberfläche einer n -dimensionalen Kugel vom Radius r ist. Wir wissen/setzen voraus, daß

$$S_n(r) = S_n r^{n-1} \quad (S_n := S_n(1)). \quad (5.26)$$

Hiermit reduziert sich das n -dimensionale radialsymmetrische Integral zu einem 1-dimensionalen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-r^2) d^n r &= \int_0^\infty \exp(-r^2) S_n(r) dr = S_n \int_0^\infty \exp(-r^2) r^{n-1} dr \\ &= \frac{S_n}{2} \int_0^\infty \exp(-r^2) r^{n-2} dr^2 = \frac{S_n}{2} \int_0^\infty x^{n/2-1} \exp(-x) dx \\ &= \frac{S_n}{2} \Gamma(n/2) \end{aligned} \quad (5.27)$$

wobei für $z > 0$ die Gammafunktion $\Gamma(z)$ eingeführt wurde mit der Definition

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx \quad (5.28)$$

Nun gilt aber auch Faktorisierung des Integrals

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-r^2) d^n r &= \int [\exp(-x_1^2) \cdot \dots \cdot \exp(-x_n^2)] dx_1 \dots dx_n \\ &= \left(\int \exp(-x_1^2) dx_1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\int \exp(-x_n^2) dx_n \right) \\ &= \pi^{n/2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Aus der Gleichheit der Ergebnisse folgt

$$S_n = 2 \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (5.30)$$

Wir wissen, $S_1 = 2$ (warum!?) und $S_2 = 2\pi$, also

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad \Gamma(1) = 1 \quad (5.31)$$

Wir wollen nun eine Rekursionsbeziehung für die Gammafunktion herleiten, die es gestattet, in einfacher Weise die Funktionswerte von ganz- und halbzahligen Argumenten zu berechnen. Partielle Integration liefert (für $z > 1$ verschwindet der ‘‘Oberflächenterm’’)

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx \\ &= -x^{z-1} \exp(-x) \Big|_0^\infty + (z-1) \int_0^\infty x^{z-2} \exp(-x) dx \\ &= (z-1) \Gamma(z-1) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \Gamma(3/2) &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} & \Gamma(2) &= 1 \\ \Gamma(5/2) &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} & \Gamma(3) &= 2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Insbesondere sehen wir: $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Damit gilt für die Flächen der 3- und 4-dimensionalen Kugeln

$$S_3 = 4\pi \quad S_4 = 2\pi^2 \quad (5.34)$$

Nun berechnen wir das Volumen einer n -dimensionalen Kugel mit Radius R

$$V_n(R) = \int_{r \leq R} 1 d^n r = \int_0^R S_n(r) dr = S_n \int_0^R r^{n-1} dr = S_n \frac{r^n}{n} \Big|_0^R = \frac{S_n}{n} R^n \quad (5.35)$$

Man sieht, wie die vertrauten Fälle $n \leq 3$ sich einfügen.

6 Vektoranalysis

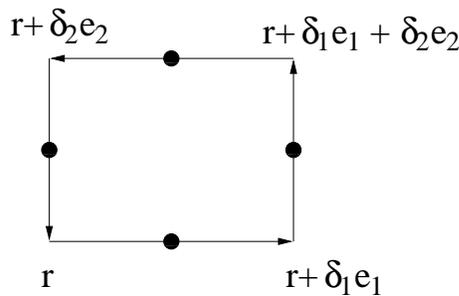
Wir nehmen hier das Thema der Wegintegrale auf und werden auch Integrale von Vektorfeldern auf (durch) Flächen betrachten sowie den Zusammenhang gewisser Wegintegrale mit Flächenintegralen etc.

Rotation (rot bzw. $\vec{\nabla} \times$) differentieller Stokesscher Satz

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie man das Abweichen eines Kraftfeldes von der Eigenschaft “konservativ” quantifizieren kann. Insbesondere suchen wir ein einfaches “lokales” Kriterium, das das umständliche Integral-Kriterium ersetzt durch “einfachere” Differential-Ausdrücke.

Ein Vektorfeld heißt nach Definition konservativ, wenn für beliebige Wege c_1 und c_2 mit gleichen Anfangs- und Endpunkten die Wegintegrale identisch sind. Damit gleichbedeutend ist (natürlich), daß die Wegintegrale aller geschlossenen Wege null ergeben (warum?).

Wir betrachten ein beliebiges (konservatives oder nicht-konservatives) Kraftfeld \vec{F} und integrieren dies über einen kleinen geschlossenen Weg, der Rechteckform haben möge mit Kantenlängen δ_1 und δ_2 entlang der Richtungsvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 .



$$\int_{\square} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta \left[F_1 \left(\vec{r} + \frac{\delta_1}{2} \vec{e}_1 \right) - F_1 \left(\vec{r} + \frac{\delta_1}{2} \vec{e}_1 + \delta_2 \vec{e}_2 \right) + F_2 \left(\vec{r} + \delta_1 \vec{e}_1 + \frac{\delta_2}{2} \vec{e}_2 \right) - F_2 \left(\vec{r} + \frac{\delta_2}{2} \vec{e}_2 \right) \right] \quad (6.1)$$

Nun linearisieren wie die auftretenden Terme, d.h. Ausdrücke $f(x + \Delta) - f(x)$ ersetzen wir durch $f'(x)\Delta$. Dies ist nur eine Approximation, der entstehende Fehler ist jedoch “von höherer Ordnung als Δ ”. Allgemein sagt man, daß ein Fehler “von höherer Ordnung als Δ^n bzw. $o(\Delta^n)$ ” ist, wenn die Differenz zwischen “gewünschtem” und approximiertem Term dividiert durch Δ^n gegen 0 geht im Limes $\Delta \rightarrow 0$. Wir erhalten in “führender” Ordnung

$$\int_{\square} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_1 \delta_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(\vec{r}) \right] \quad (6.2)$$

Moral: Das Wegintegral um das Rechteck hat als Wert den Flächeninhalt des Rechtecks multipliziert mit dem Ausdruck [...].

Bemerkung: Die vorgeführte Rechnung liefert das richtige Ergebnis, wird aber nicht den Kriterien eines strengen Beweises gerecht. Wir werden später im Zusammenhang mit der Taylor-Entwicklung Methoden kennenlernen, die diese Lücke zu stopfen gestatten.

Definition: Wir definieren für ein beliebiges (3-dimensionales) Kraftfeld \vec{F} die sogenannte *Rotation* “rot $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ ”, in Komponenten

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Mit der Definition der Rotation läßt sich unser obiger Befund kompakter und allgemeiner formulieren

$$\int_{\text{inf. Kurve } c} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} \quad (\text{infinitesimaler Stokesscher Satz}) \quad (6.4)$$

wobei c eine “kleine” (infinitesimale) Fläche umschließt und $d\vec{A}$ der Flächen-Vektor ist, d.h. senkrecht zur Fläche mit Betrag gleich dem Inhalt der von c umlaufenen Fläche. Ferner soll der Umlaufsinn von c bzgl. $d\vec{A}$ einer Rechten-Hand-Regel folgen.

Für eine beliebige “endliche” Kurve c gilt der Stokessche Satz

$$\int_{\text{Kurve } c} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\text{Fläche}} \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} \quad (6.5)$$

wobei das Integral auf der rechten Seite über eine (beliebige) von c eingespannte Fläche zu nehmen ist. Eine systematische Definition und Behandlung von Flächen- und höherdimensionalen Integralen erfolgt im nächsten Kapitel.

Wir sind jedoch schon in der Lage folgende Charakterisierung vorzunehmen:

Eine Kraft \vec{F} ist konservativ genau dann, wenn $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

Bemerkung: “ \Rightarrow ” gilt immer, “ \Leftarrow ” gilt, wenn die zugrunde liegende Geometrie *einfach zusammenhängend* ist, d.h. in einem gewissen Sinne keine Löcher aufweist.

Nachtrag: Für konservatives Kraftfeld \vec{F} (mit Potential $U(\vec{r})$) folgt aus den Newton’schen Gleichungen

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (6.6)$$

Energieerhaltung

$$\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) = \text{zeitlich konstant} =: E \quad (6.7)$$

Beweis: Es gilt

$$m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow m \underbrace{\dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} - \vec{F}(\vec{r}) \dot{\vec{r}}}_{\vec{\nabla} U} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}(t)^2 + U(\vec{r}(t)) \right) = 0 \quad (6.8)$$

Beispiel 1: Sei $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y} z - \frac{\partial}{\partial z} y, \frac{\partial}{\partial z} x - \frac{\partial}{\partial x} z, \frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y} x \right) = (0, 0, 0) \quad (6.9)$$

Beispiel 2: Sei $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) = (0, 0, 2) \quad (6.10)$$

Beispiel 3: Sei $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x, 0)$

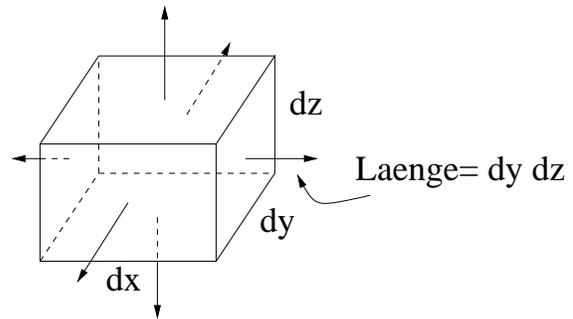
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = (0, 0, 0) \quad (6.11)$$

**Divergenz (div bzw. $\vec{\nabla} \cdot$)
differenzieller Gauß'scher Satz**

Wir wollen den "Fluß" eines Vektorfeldes \vec{F} "aus" einen "kleinen" Quader mit Kantenlängen dx , dy , dz berechnen. Konkret ist damit das Oberflächenintegral

$$\int_{\text{Oberfläche}} \vec{F} d\vec{A} \quad (6.12)$$

gemeint. Für einen "infinitesimalen" Quader ist dies elementar



$$\begin{aligned} \int_{\text{Oberfläche}} \vec{F} d\vec{A} &= \sum_{\text{Flächen}} \vec{F}(\text{Flächenmitte}) d\vec{A} \\ &= F_1(x + dx, y, z) dydz - F_1(x, y, z) dydz \\ &\quad + F_2(x, y + dy, z) dx dz - F_2(x, y, z) dx dz \\ &\quad + F_3(x, y, z + dz) dx dy - F_3(x, y, z) dx dy \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3 \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (6.13)$$

Definition: Wir definieren für eine beliebiges Vektorfeldes \vec{F} die *Divergenz* "div $\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ " durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} F_n \quad (6.14)$$

Insbesondere ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ eine reellwertige Funktion ("skalar=einkomponentig"). Mit der Definition der Divergenz läßt sich unser obiger Befund kompakter und allgemeiner formulieren

$$\int_{\substack{\text{inf. geschloss.} \\ \text{Fläche}}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) dV \quad (\text{infinitesimaler Gauß'scher Satz}) \quad (6.15)$$

wobei dV das von der geschlossenen Fläche umfaßte Volumen ist.
Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (a\vec{b}) &= a\vec{\nabla} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} a \\ \vec{\nabla} \times (a\vec{b}) &= a\vec{\nabla} \times \vec{b} + (\vec{\nabla} a) \times \vec{b} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} a) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} \end{aligned} \quad (6.16)$$

dabei ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (= \Delta)$ der sogenannte Laplace-Operator, definiert durch

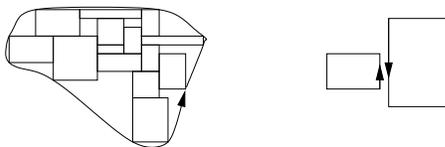
$$\Delta f := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) f \quad (6.17)$$

In $\Delta \vec{a}$ muß der Laplace-Operator auf jede Komponente von \vec{a} angewandt werden.

Integralsätze

Wir hatten schon im letzten Kapitel die infinitesimalen Versionen der Integralsätze nach Stokes und Gauß kennengelernt. Nach diesen Sätzen lassen sich Integrale von Vektorfeldern über geschlossene Wege in Integrale der Rotationen über die eingeschlossenen Flächen umschreiben (Stokes). Analog gehen Integrale von Vektorfeldern über geschlossene Flächen in Integrale der Divergenzen über die eingeschlossenen Volumina über (Gauß).

Die soeben formulierten Sätze wurden für infinitesimale Geometrien “bewiesen”. Da endliche Geometrien in geeigneter Weise diskretisiert werden können, liefert die Anwendung der Integralsätze auf die infinitesimalen Rechtecke und Quader die gewünschte Aussage für die endlichen Geometrien! Beachte: die Beiträge von aneinander stoßenden Kanten bzw. Flächen zum Weg- bzw. Flächenintegral heben sich paarweise auf!



$$\begin{aligned} \int_{\text{geschl. Weg}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{\text{eingeschl. Fläche}} \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} && \text{(Stokes)} \\ \int_{\text{geschloss. Fläche}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} &= \int_{\text{eingeschl. Volumen}} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) dV && \text{(Gauß)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Bemerkung: Bevor wir Beispiele angehen, soll noch auf eine anschauliche Deutung des Gauß’schen Satzes hingewiesen werden. Das Flächenintegral eines Vektorfeldes hat die Bedeutung eines Fluß’ aus dem umschlossenen Volumen durch die begrenzende Oberfläche. Nach Gauß ist dieses Integral gleich dem Volumenintegral der Divergenz des Vektorfeldes, diese charakterisiert nach Gauß die Quellen des Vektorfeldes. Daher auch der Name “Divergenz”.

Beispiel Stokes:

- (i) Das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ integriert über den Kreis mit Radius R um den Ursprung in der xy -Ebene liefert $2\pi R^2$, siehe Beispiel 2 (S.21) in Kapitel 4. Nach Beispiel 2 (S.32) ist $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, 2)$, also konstant. Hier liefert die Integration von $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ über die umrandete Kreisscheibe (Flächenvektor $(0, 0, \pi R^2)$) direkt $\pi R^2 \times 2$. Man sieht die Gleichheit!
- (ii) Das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ über eine Kreislinie mit Radius R in der x - y -Fläche und dem Ursprung als Mittelpunkt integriert liefert (Wegparametrisierung mit $\vec{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$):

$$\int_{\text{Kreislinie}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2 \quad (6.19)$$

Nach (6.11) ist die Divergenz des Vektorfeldes null und somit muß das Flächenintegral der Divergenz über die Kreisfläche trivialerweise null sein. Dies scheint eine Verletzung des Satzes von Stokes zu sein! Auflösung: die Divergenz (bzw. das Vektorfeld selbst) ist nicht auf der ganzen Kreisfläche definiert, nämlich nicht bei $x = y = 0$ (z -Achse). Der Satz von Stokes ist also nicht anwendbar!

Mit dem letzten Fall haben wir ein konkretes Beispiel vorliegen, warum die obige Charakterisierung konservativer Vektorfelder über die Rotationsfreiheit nur eingeschränkt gilt: jedes konservative Feld ist rotationsfrei, aber nicht jedes rotationsfreie Feld ist konservativ. Falls wir jedoch zusätzlich zur Rotationsfreiheit wissen, daß jeder geschlossene Weg der Rand einer Fläche ist, auf der das Vektorfeld überall definiert ist, dann ist das Vektorfeld konservativ. (Die geometrische Bedingung an den Definitionsbereich des Vektorfeldes ist gleichbedeutend mit dem sogenannten *einfachen Zusammenhang*).

Beispiel Gauß: Betrachte $\vec{F}(\vec{r}) = r^n \hat{r}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(r^{n-1}x) + \frac{\partial}{\partial y}(r^{n-1}y) + \frac{\partial}{\partial z}(r^{n-1}z) \\ &= r^{n-1} + (n-1)r^{n-2}\frac{x}{r} + \dots \\ &= 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-2}\frac{r^2}{r} = (n+2)r^{n-1}\end{aligned}\quad (6.20)$$

Integral über Kugelfläche

$$\int_{\text{Fläche}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} = 4\pi R^2 R^n = 4\pi R^{n+2} \quad (6.21)$$

Integral der Divergenz über Kugel (sinnvoll für $n > -2$)

$$\begin{aligned}\int_{\text{Kugel}} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) dV &= 4\pi \int_0^R (n+2)r^{n-1}r^2 dr \\ &= 4\pi r^{n+2} \Big|_0^R = 4\pi R^{n+2}\end{aligned}\quad (6.22)$$

Identität!

7 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition: Sei $f(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion (evtl. def. auf offener Teilmenge D von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$), dann heißt

$$y' = f(x, y) \quad (7.1)$$

(gewöhnliche) Differentialgleichung 1. Ordnung (DGL). Unter einer Lösung versteht man eine Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, deren Graph im Definitionsbereich von f liegt, und ferner erfüllt $y'(x) = f(x, y(x))$.

Beispiel: DGL $y' = 2xy$ hat Lösung $y(x) = \lambda \exp(x^2)$ mit beliebigem, aber festem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition: Das sog. “Anfangswertproblem” besteht aus DGL und der Vorgabe einer Anfangsbedingung (x_0, y_0) aus D . Dabei hat eine Lösung $y(x)$ sowohl die DGL als auch $y(x_0) = y_0$ zu erfüllen.

Beispiel: Offenbar ist mit obiger DGL jede Anfangsbedingung eindeutig erfüllbar mit $\lambda = y_0 \exp(-x_0^2)$.

Die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu Anfangswertproblemen ist interessant. Wir notieren:

- (i) Ist f wie oben stetig, so existiert mindestens eine Lösung $y(x)$, wobei der Definitionsbereich von $y(x)$ evtl. ein (kleines) Intervall um x_0 ist.
- (ii) Ist $f(x, y)$ außerdem nach y stetig partiell differenzierbar (d.h. $\partial f / \partial y$ existiert und ist eine stetige Funktion von (x, y)), so ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig.

Beispiel: DGL $y' = 2\sqrt{|y|}$ und Anfangsbedingung $(0, 0)$, d.h. Forderung $y(0) = 0$, hat unendlich viele Lösungen, z.B. $y_1(x) = 0$ für alle x und $y_2(x)$ stückweise definiert durch

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \end{cases} \quad (7.2)$$

Wir wollen nun spezielle DGL-Typen besprechen, die häufig eine konkrete Lösung erlauben.

Lineare DGL “ $f(x, y) = -a(x)y + g(x)$ ” bzw. “ $y' + a(x)y = g(x)$ ”

Ist $g(x) = 0$ für alle x , so spricht man auch von “linear homogener”, sonst von “linear inhomogener” DGL.

Wir überlegen zunächst, daß die allgemeine Lösung schrittweise gefunden werden kann:

- (i) Auffinden irgendeiner speziellen Lösung y_{sp} zum inhomogenen Problem $y' + a(x)y = g(x)$.
- (ii) Auffinden aller Lösungen zum homogenen Problem $y' + a(x)y = 0$.

Die allgemeinste Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich als Summe aus spezieller Lösung und bel. homogener Lösung (Superpositionsprinzip).

Ein **wichtiger Spezialfall** liegt vor mit:

$a(x) = a$, d.h. konstant, und $g(x) = \text{Exponentialfunktion} = g_0 \exp(-\mu x)$. Lösung:

- (i) Ansatz für spezielle Lösung:

Exponentialfunktion proportional zur Inhomogenität $y_{sp}(x) = C \exp(-\mu x)$. Einsetzen $(-\mu + a)C \exp(-\mu x) = g_0 \exp(-\mu x)$, folglich $C = g_0 / (a - \mu)$ und

$$y_{sp}(x) = \frac{g_0}{a - \mu} \exp(-\mu x) \quad (7.3)$$

(ii) Ansatz für Lösung der homogenen DGL:

Exponentialfunktion $\exp(-\nu x)$ mit zu bestimmendem Exponenten. Einsetzen in hom. DGL liefert $(-\nu + a) \exp(-\nu x) = 0$, also $\nu = a$.

Die allgemeinste Lösung der inhomogenen DGL lautet:

$y(x) = y_{sp}(x) + \lambda \exp(-ax)$ mit beliebigem, aber festem λ . (Mit freiem Parameter λ kann jede Anfangsbedingung erfüllt werden.)

Beispiel: Wir wollen eine radioaktive Substanz “I” betrachten, die zur Zeit $t = 0$ aus N_I Kernen besteht und sich mit der Rate a_I in eine Substanz “II” umwandelt, die selbst mit der Rate a_{II} zerfällt. Wir sind an der Anzahl $N_{II}(t)$ der Kerne der Substanz “II” als Funktion der Zeit interessiert.

Anzahl $N_I(t)$ nach Übungsaufgabe oder wie folgt:

Ratengleichung $\dot{N}_I(t) = -a_I N_I(t)$, linear homogen, also Lösung $N_I(t) = N_I \exp(-a_I t)$ (da $\dot{N}_I(t) = -a_I N_I \exp(-a_I t) = -a_I N_I(t)$). Der Koeffizient ist so gewählt, daß die Anfangsbedingung $N_I(0) = N_I$ erfüllt ist.

Ratengleichung für $N_{II}(t)$:

$$\dot{N}_{II}(t) = -a_{II} N_{II}(t) + a_I N_I(t) = -a_{II} N_{II}(t) + a_I N_I \exp(-a_I t) \quad (7.4)$$

Offenbar ist dies eine lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Inhomogenität vom Exponentialtyp.

(i) Spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$N_{sp}(t) = \frac{a_I N_I}{a_{II} - a_I} \exp(-a_I t) \quad (7.5)$$

(ii) Lösung der homogenen DGL:

$$\exp(-a_{II} t) \quad (7.6)$$

Wir wollen nun kurz das Lösungsverfahren der **allgemeinen linearen DGL 1. Ordnung** besprechen.

zu (i): Sei $A(x)$ eine Stammfunktion zu $a(x)$. Ansatz: $y(x) = \exp(-A(x))z(x)$. Einsetzen in DGL

$$\begin{aligned} [-a(x) \exp(-A(x))z(x) + \exp(-A(x))z'(x)] + a(x) \exp(-A(x))z(x) &= g(x) \\ \Rightarrow z'(x) &= \exp(A(x))g(x) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Die letzte DGL wird gelöst durch bel. Stammfunktion $B(x)$ zu $\exp(A(x))g(x)$. Ergebnis: $y_{sp}(x) = B(x) \exp(-A(x))$. Verfahren bekannt als “Variation der Konstanten”.

zu (ii): $y' + a(x)y = 0$ wird durch die Fkt. $\lambda \exp(-A(x))$ mit bel. konst. λ erfüllt.

Bemerkung: In der Terminologie der lin. Algebra stellt der Lösungsraum zum homogenen Problem einen 1-dim. Unterraum des (unendlichdimensionalen) Raumes aller Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dar. Der Lösungsraum zum inhomogenen Problem stellt einen 1-dim. affinen Unterraum des Raumes aller Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Aufpunkt y_{sp} dar. (Bem.: falls DGL 1. Ordnung für m -dim. vektorwertige Funktionen formuliert ist, ist der Lösungsraum sogar m -dimensional.)

Als weitere Verallgemeinerung des letzten Falles behandeln wir:

DGL mit getrennten Variablen “ $f(x, y) = g(x)h(y)$ ” (mit $h(y_0) \neq 0$)

Die DGL $y' = f(x, y)$ kann umgeformt werden in

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x) \Rightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^x g(x) dx \quad (7.8)$$

Dies ergibt eine implizite Bestimmungsgleichung für $y(x)$, die “nur” Integrationen und Umkehrungen involviert.

Beispiel: Exakte Differentialgleichungen, integrierender Faktor: später

Definition: Gewöhnliche Differentialgleichung n . Ordnung

Sei $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion (evtl. def. auf offener Teilmenge D von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \dots \times \mathbb{R}^m$), dann heißt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (7.9)$$

(gewöhnliche) Differentialgleichung n . Ordnung (DGL).

Beispiel: Sei $\vec{r}(t)$ die Raumkurve eines Punktes mit Masse m und $\vec{F}(\vec{r})$ eine (ortsabhängige) Kraft, dann gilt nach Newton

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad (7.10)$$

\vec{F} kann prinzipiell auch geschwindigkeits- und zeitabhängig sein, was jedoch zumindest in fundamentalen Theorien ausgeschlossen wird.

Beispiel: Lösung von “ $m\ddot{r}(t) = F(r(t))$ ” mittels “Energiesatz”

Hier wird zunächst der 1-dimensionale Fall betrachtet. Erinnerung: Durch Multiplikation mit $\dot{r}(t)$ und Benutzung des (Potentials) $U(r)$ zu $F(r)$ folgt

$$m\ddot{r}(t)\dot{r}(t) = F(r(t))\dot{r}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2}(\dot{r}(t))^2 + U(r(t)) \right] = 0 \quad (7.11)$$

Die letzte Differentialgleichung wird durch eine Konstante E (Gesamtenergie) gelöst

$$\frac{m}{2}(\dot{r}(t))^2 + U(r(t)) = E, \quad (7.12)$$

d.h. Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie ist zeitlich konstant.

Eine explizite Lösung (allein) mittels Energiesatz ist im 1-dimensionalen Fall möglich durch Rückführung von (7.12) auf “getrennte Variable”:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)]} \Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)]}} \quad (7.13)$$

Der Energiesatz liefert also nicht direkt die Funktion $r(t)$, sondern eher die “Umkehrfunktion” $t(r)$. Da aber die Umkehrfunktion nicht global existiert, da in vielen Fällen $r(t)$ periodisch ist, muß man sich $r(t)$ aus $t(r)$ zusammenstückeln.

Beispiel: (Harmonischer Oszillator) Ein Körper der Masse m sei an einer harmonischen Feder aufgehängt, eine Rückstellkraft wirkt streng *proportional* zur Auslenkung x mit Federkonstante k : $F = -kx$. Das Potential ist $U = \frac{1}{2}kx^2$. Man sieht schnell, daß die DGL 2. Ordnung $m\ddot{x} + kx = 0$ allgemein durch

$$x(t) = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t, \quad \Omega = \sqrt{k/m} \quad (7.14)$$

gelöst wird. Dies und der gedämpfte harmonische Oszillator werden bald im Detail besprochen. Hier: per Energiesatz. Wir setzen in (7.13) ein

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]}} = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left[1-\frac{k}{2E}r^2\right]}} \underset{x=\sqrt{\frac{k}{2E}}r}{=} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7.15)$$

Die benötigte Stammfunktion ist der arcsin:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0) = \pm(\arcsin x(t) - \arcsin x(t_0)) \quad (7.16)$$

Hieraus folgt die vorab gegebene Lösungsdarstellung.

Bemerkung: Prinzipiell ist eine DGL n . Ordnung äquivalent zu einer DGL 1. Ordnung für einen Satz von n Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$:

$$y_1'(x) = y_2(x), \dots, y_{n-1}'(x) = y_n(x), \quad y_n'(x) = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (7.17)$$

Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen können direkt übernommen werden. Beachte: lineare DGL n . Ordnung haben einen n -dimensionalen Lösungsraum (falls DGL für m -dim. vektorwertige Funktionen formuliert ist, ist der Lösungsraum sogar $n \cdot m$ -dimensional).

Beispiel: Lineare DGL n . Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad (7.18)$$

(i) Spezielle Lösung für $g(x) = \text{Exponentialfunktion} = g_0 \exp(\mu x)$. Achtung: hier wurde kein – Vorzeichen im Exponenten gewählt. Lösung durch Ansatz $y_{sp}(x) = C \exp(\mu x)$

$$(a_n \mu^n + a_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + a_1 \mu + a_0) C = g_0 \quad (7.19)$$

was offenbar im allgemeinen direkt nach C auflösbar ist.

(ii) Lösung der homogenen DGL durch Ansatz $y(x) = \exp(zx)$ führt auf Nullstellengleichung eines Polynoms n . Ordnung in z

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (7.20)$$

mit im allgemeinen n Lösungen, die auch komplex sein können/werden. Falls Nullstellen entartet sind, d.h. von höherer als 1. Ordnung, so muß der obige Ansatz modifiziert werden [$y(x) = \text{Polynom}(x) \exp(zx)$].

Beispiel:

Erzwungene Schwingungen des **harmonischen Oszillators** mit Reibung
Hier haben wir zwei konkrete Realisierungen

Mechanik

Ein Körper der Masse m sei an einer harmonischen Feder aufgehängt, d.h. es wirkt eine Rückstellkraft streng *proportional* zur Auslenkung x mit Federkonstante k : $-kx$. Ferner erfolge die Bewegung in einem Medium mit Reibungskonstante r , d.h. es wirkt eine Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit: $-r\dot{x}$. Zu guter letzt kann eine externe Kraft $f(t)$ wirken, so daß nach Newton gilt

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \text{Summe aller Kräfte} = -kx - r\dot{x} + f(t) \\ \Leftrightarrow m\ddot{x} + r\dot{x} + kx &= f(t) \end{aligned} \quad (7.21)$$

Elektrodynamik/Elektronik

Hier betrachten wir eine Reihenschaltung aus Kondensator (Kapazität C), Widerstand (Widerstand R) und Spule (Induktivität L). Die Kenngrößen drücken einen linearen Zusammenhang aus

zwischen individuell am Baustein anliegender Spannung $U_{C,R,L}$ und: Ladung Q , Strom I , zeitliche Stromänderung \dot{I}

$$\begin{aligned} Q &= C \cdot U_C \\ U_R &= R \cdot I \\ U_L &= L \cdot \dot{I} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Bei einem geschlossenen Schaltkreis ist die Summe aller Einzelspannungen 0 bzw. – wenn eine externe Spannungsquelle vorliegt – gleich $U(t)$

$$U_C + U_R + U_L = U(t) \quad (7.23)$$

Wir leiten diese Gleichung einmal nach t ab und benutzen $I = \dot{Q}$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{U}(t) \quad (7.24)$$

Auch diese Gleichung ist von der Form (7.21).

Allgemeine Lösung der homogenen DGL

Ansatz: $x(t) = e^{zt}$, führt auf

$$\begin{aligned} mz^2 + rz + k &= 0 \\ z^2 + \frac{r}{m}z + \frac{k}{m} &= 0 \\ z_{1,2} &= -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = Ae^{z_1 t} + Be^{z_2 t} \quad (7.26)$$

Durch Vorgabe der Anfangsbedingung für $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ (zwei für DGL 2. Ordnung!) können A und B fixiert werden.

Wir müssen **drei Fälle** unterscheiden:

Gedämpfter Fall (starke Reibung) $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$

Hier gibt es nicht mehr viel zu sagen. Jede Lösung der homogenen DGL ist eine Summe von exponentiell abfallenden Termen.

Schwingungs-Fall (schwache Reibung) $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$

Hier sehen wir “ein Problem in der Quadratwurzel”. Tatsächlich können wir mit Quadratwurzeln aus negativen (reellen) Zahlen arbeiten, wobei wir i mit $i \cdot i = -1$ einführen. Die Gleichung $z^2 = -r$, r positiv, hat dann die Lösungen $\pm i\sqrt{r}$. Wir schreiben also um

$$z_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\Omega \quad (7.27)$$

wobei

$$1/\tau := \frac{r}{2m}, \quad \Omega := \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} \quad (7.28)$$

Den Ansatz schreiben wir:

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} e^{i\Omega t} + Be^{-t/\tau} e^{-i\Omega t} \quad (7.29)$$

Wir sehen wieder, daß A und B eindeutig durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden können (evtl. komplex). In jedem Fall ergibt sich für reelle Anfangswerte eine reelle Lösungsfunktion! Zur Deutung beachte (siehe Übungen):

$$e^{i\Omega t} = \cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t) \quad (7.30)$$

Also beschreibt die gefundene Lösung eine gedämpfte Schwingung mit Kreisfrequenz Ω und Relaxationszeit τ .

Aperiodischer Grenz-Fall $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$

Hier beschreibt der rein exponentielle Ansatz nicht mehr alle Lösungen, da $z_1 = z_2 = -\frac{r}{2m} =: z$. Es "fehlt eine Lösung". Wir machen den Ansatz

$$te^{zt} \quad (7.31)$$

mit $z = -\frac{r}{2m}$ wie schon bestimmt. Wir sehen

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = (mz^2 + rz + k)te^{zt} + (2mz + r)e^{zt} = 0 + 0 = 0 \quad (7.32)$$

da die erste Klammer aufgrund des ursprünglichen Ansatzes 0 ist und die zweite Klammer aufgrund der Bedingung des aperiodischen Grenzfall!

Dieser Fall hat in der Technik (Stoßdämpfer etc.) eine ausgezeichnete Bedeutung, da unter dieser Bedingung (oder in deren Nähe?) Energie schnellstmöglich dissipiert wird!

Bemerkung: Den obigen Ansatz findet man durch Raten oder aber indem man den Ansatz wie im gedämpften oder Schwing-Fall macht und die Koeffizienten A und B im aperiodischen Limes bei festgehaltener Anfangsbedingung für Ort und Geschwindigkeit bestimmt.

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL

a) *Harmonische Kraft*

Wir wollen nun eine spezielle Lösung zu (7.21) im Falle einer periodischen externen Kraft mit Winkelfrequenz ω bestimmen

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (7.33)$$

Beachte, daß $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$. M.a.W.: Wir sind nur an dem Real-Teil interessiert, arbeiten aber mit der um den Imaginärteil vervollständigten "einfacheren" Exponentialfunktion.

Wir setzen an $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ und erhalten

$$x_0 = \frac{f_0}{-m\omega^2 + ir\omega + k} \quad (7.34)$$

Zerlegung nach Betrag und Phase:

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + (r\omega)^2}} e^{i\phi}, \text{ wobei } \tan \phi = \frac{r\omega}{m\omega^2 - k} \quad (7.35)$$

Dies bedeutet, daß eine harmonische externe Kraft mit Stärke f_0 zu einer Schwingung mit Amplitude $|x_0|$ (Betrag) und Phasenverschiebung ϕ (Phase) führt.

Bemerkung: Im Falle des elektronischen Schaltkreises trägt der Koeffizient, der die Strom-Spannungs-Beziehung vermittelt den Namen *Impedanz* (Z). Aus (7.24) folgt analog zum mechanischen Fall

$$\left[(i\omega)^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right] I_0 = i\omega U_0 \quad (7.36)$$

Also gilt für $Z := U_0/I_0$