Übung 9 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 20.12.2023 / Besprechung: 22.12.2023

1. **Spinmatrizen für** $s = \frac{3}{2}$ (5)
   Die darstellenden Matrizen für einen Spin/Drehimpuls $s = \frac{3}{2}$ lauten

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_2 = \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass die Drehimpulsalgebra $[\mathbf{J}_j, \mathbf{J}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\mathbf{J}_l$ erfüllt ist.

   (b) Gib explizit das Quadrat $\vec{\mathbf{J}}^2$ und die Auf- und Absteigeoperatoren $\mathbf{J}_\pm$ an.

   (c) Konstruiere ein gemeinsames Eigenvektorsystem von $\vec{\mathbf{J}}^2$ und $\mathbf{J}_3$.

2. **Sphärische Zylinderfunktionen** (15)
   Wir wollen die sphärischen Zylinderfunktionen j_n und n_n berechnen. Definiere hierzu die Differentialoperatoren

$$Z_n := \frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \frac{n(n+1)}{z^2} + 1\,, \tag{1a}$$

$$P_n := -z^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-n}\,, \tag{1b}$$

$$M_n := z^{-n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{n+1}\,. \tag{1c}$$

   Die DGL der sphärischen Zylinderfunktionen, (4.6) der Vorlesung, kann geschrieben werden als

$$Z_n f(z) = 0\,. \tag{2}$$

   (a) Zeige nun z.B. mit Computeralgebra

$$Z_{n+1}P_n = \left(\frac{n}{z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)Z_n\,, \tag{3a}$$

$$Z_{n-1}M_n = \left(\frac{n+1}{z} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)Z_n\,. \tag{3b}$$

   Wende dazu jede Seite auf eine beliebige Funktion $f(z)$ an und zeige, daß die gleichen Terme entstehen.

   (b) Sei nun $f_n(z)$ eine Lösung von (2) zum Index n, also $Z_n f_n(z) = 0$, dann gilt $Z_{n+1}P_n f_n(z) = 0$ und $Z_{n-1}M_n f_n(z) = 0$. Die Operatoren P_n und M_n erzeugen also aus Lösungen von (2) zum Index n solche zum Index $n \pm 1$.
   Definiere zu einer gegebenen Lösung f_{n_0} unendlich viele f_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ durch sukzessive Anwendung der P und M Operatoren mit geeigneten Indizes

$$f_{n+1}(z) := P_n f_n(z)\,, \tag{4a}$$

$$f_{n-1}(z) := M_n f_n(z)\,. \tag{4b}$$

   Warum führt das Absteigen/Aufsteigen nach Aufsteigen/Absteigen

$$M_{n+1}f_{n+1}(z) = f_n(z)\,, \tag{5a}$$

$$P_{n-1}f_{n-1}(z) = f_n(z)\,, \tag{5b}$$

   zu genau der Funktion zurück, von der gestartet wurde? Benutze dazu (und beweise)

$$M_{n+1}P_n = (1 - Z_n)\,, \tag{6a}$$

$$P_{n-1}M_n = (1 - Z_n)\,. \tag{6b}$$

(c) Zeige für die konstruierten Funktionen durch Vereinfachen von $M_n + P_n$

$$f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{z} f_n(z)\,. \tag{7}$$

Aus zwei sukzessiven f_0 und f_{-1} kann allein durch rekursives Lösen dieser Beziehung die gesamte Leiter der f_n berechnet werden.

(d) Zeige nun die Aussagen (4.9) und (4.10) der Vorlesung. Setze zunächst (4.10b) in (4.9) ein und erhalte

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}\,, \tag{8a}$$

$$j_{-1}(z) = \frac{\cos z}{z}\,. \tag{8b}$$

Zeige ferner, daß $M_0 j_0(z) = j_{-1}(z)$. Die Benutzung von $f_0 = j_0$ und $f_{-1} = j_{-1}$ erlaubt nun die Lösung der Rekursionsgleichung, was (4.9) mit (4.10a) liefert.

Was wir noch nicht gezeigt haben ist, daß die Lösungen die gewünschte asymptotische Eigenschaft bei $z = 0$ zeigen. Dies folgt aus der Wirkung der P und M Operatoren.