Übung 8 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 13.12.2023 / Besprechung: 15.12.2023

1. **Laguerre-Polynome** (12)
   Betrachte die gewöhnlichen Laguerre-Polynome

$$L_n(x) = \frac{\mathsf{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^n\mathsf{e}^{-x}, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

   und die erzeugende Funktion

$$w(x,t) = \frac{\mathsf{e}^{\frac{xt}{t-1}}}{1-t}, \qquad t \in \mathbb{R}, |t| < 1.$$

   (a) Zeige, dass $w(x,t)$ geschrieben werden kann als

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, t^n.$$

   Hinweis: Nutze hierfür die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^{k+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^n, \qquad k \in \mathbb{N}_0, |x| < 1, \\ \sum_{n=0}^{l}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= \sum_{k=0}^{l} a_k \sum_{r=0}^{l-k} b_r, \qquad a_j, b_j \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

   (b) Leite $w(x,t)$ nach t ab und zeige die Rekursionsformel

$$(n+1)\,L_{n+1}(x) - (2n+1-x)\,L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0.$$

   (c) Leite $L_n(x)$ nach x ab und zeige die Rekursionsformel

$$L_n'(x) - L_{n-1}'(x) + L_{n-1}(x) = 0.$$

   (d) Leite nun die Laguerre-Differentialgleichung

$$xL_n''(x) + (1-x)\,L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

   her.

   (e) Leite diese Differentialgleichung nun nach x ab. Was für eine Differentialgleichung folgt hieraus? Wiederhole diesen Prozess nun k-mal und leite dadurch eine Differentialgleichung für die zugeordneten Laguerre-Polynome

$$L_n^k(x) = (-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x)$$

   her.

2. **Virialsatz, Kommutatoren etc.** (4)

   (a) Zeige für einen Hamiltonoperator $H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{x})$

$$[H, \vec{x}] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}m}\vec{P}\,, \qquad [\vec{P}, H] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\nabla}V\,.$$

   (b) Überzeugen Sie sich von

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}rf = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}f\,.$$