Übung 7 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 06.12.2023 / Besprechung: 08.12.2023

1. **Die 3-dimensionale Darstellung der** $SO(3)$ (8)

   (a) Zeige, daß die Erzeuger der 3-dimensionalen Darstellung in den üblichen kartesischen Koordinaten gegeben sind durch

   $$J_x = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \mathrm{i}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ -1 & & \end{pmatrix}, \quad J_z = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Tipp: Wir setzen hier $\hbar = 1$ und für eine Drehung mit Drehvektor α soll gelten

   $$R_{\vec{\alpha}} = \mathsf{e}^{-\mathrm{i}\vec{\alpha}\vec{J}}. \tag{2}$$

   (b) Zeige die Kommutatorrelation

   $$[J_a, J_b] = \mathrm{i}\epsilon_{abc}\, J_c\,. \tag{3}$$

   (c) Bestimme die Eigenzustände von J_z und überprüfe die Matrixelemente von $J_\pm$ in der Eigenbasis von J_z. Achtung: Um die Matrixelemente wie in der Vorlesung angegeben zu finden, d.h. 0 und $+\sqrt{2}$, muß nicht nur die Normierung der Eigenzustände korrekt sein, sondern evtl. müssen Phasenfaktoren für die Eigenzustände eingeführt werden. Alternativ überzeugt man sich, daß

   $$V_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

   normierter Eigenzustand zu J_z ist (zu welchem Eigenwert?). Wende dann $J_\pm$ an, um die Eigenzustände zu J_z mit Eigenwerten ± 1 zu erhalten. Normiere diese Zustände.

2. **Pauli-Matrizen** (7)
   Verifiziere folgende Relationen:

   (a) $\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k = \delta_{jk} + \mathrm{i}\epsilon_{jkl}\boldsymbol{\sigma}_l$

   (b) $\left(\vec{a}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\vec{b}\vec{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \vec{a}\vec{b} + \mathrm{i}\big(\vec{a}\times\vec{b}\big)\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ für $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$

   (c) $e^{i\alpha\boldsymbol{\sigma}_j} = \cos\alpha + i\boldsymbol{\sigma}_j\sin\alpha$ für $\alpha\in\mathbb{R}$

3. **Drehimpuls** (5)
   Betrachte den Drehimpulsoperator

   $$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{x}}\times\vec{\mathbf{p}}$$

   und zeige die Relationen

   (a) $\left[\mathbf{L}_j, \vec{\mathbf{p}}^2\right] = 0$,

   (b) $\vec{\mathbf{L}}^2 = \vec{\mathbf{x}}^2\vec{\mathbf{p}}^2 - (\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{p}})^2 - \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{p}}$.