Übung 6 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 29.11.2023 / Besprechung: 01.12.2023

1. **Der eindimensionale harmonische Oszillator**(7)
   Wir haben die Eigenzustände des harmonischen Oszillators kennengelernt. Seit dem Übungsblatt 5 wissen Sie, daß die normierten Eigenfunktionen

   $$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^\dagger)^n \phi_0\,, \quad \text{in Dirac-Notation} \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^\dagger)^n |0\rangle\,,$$

   lauten, wobei wir die Kurzfassung in Dirac-Schreibweise $|n\rangle := |\phi_n\rangle$ benutzen (insbes. $|0\rangle = |\phi_0\rangle$ und ϕ_0 aus der Vorlesung bekannt ist).

   (a) Zeige, dass
   $$\mathbf{b}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \qquad \mathbf{b}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ ,$$
   gilt.

   (b) Berechne die Matrix-Elemente der Orts- und Impulsoperatoren:
   $$x_{mn} = \langle m \mid \mathbf{x} \mid n\rangle\,, \qquad p_{mn} = \langle m \mid \mathbf{p} \mid n\rangle$$

   (c) Berechne höhere Momente der Verteilungsfunktion, d.h. Erwartungswerte von Potenzen von $\mathbf{x}$ in einem beliebigen Eigenzustand
   $$\left\langle \mathbf{x}^1 \right\rangle_n, \left\langle \mathbf{x}^2 \right\rangle_n, \left\langle \mathbf{x}^3 \right\rangle_n, \left\langle \mathbf{x}^4 \right\rangle_n.$$

2. **Nullpunktsenergie und Unschärferelation** (5)

   (a) Bestimme die kleinstmögliche Energie des harmonischen Oszillators, indem nur die Energiebeziehung und die Unschärferelation benutzt werden.

   (b) Die Unschärferelation besagt, dass
   $$\triangle\mathbf{x}\triangle\mathbf{p} \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \left(\left\langle \mathbf{x}^2\right\rangle - \langle \mathbf{x}\rangle^2\right)\left(\left\langle \mathbf{p}^2\right\rangle - \langle \mathbf{p}\rangle^2\right) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$
   gilt, wobei $\langle\cdot\rangle$ bezüglich irgendeines Zustandes gemeint ist und hier solche gewählt werden, dass $\langle\mathbf{x}\rangle = \langle\mathbf{p}\rangle = 0$ ist. Verwende nun die Eigenzustände $|n\rangle$ aus Aufgabe 1 und berechne das Unschärfeprodukt $\triangle\mathbf{x}\triangle\mathbf{p}$ und vergleiche das Ergebnis mit Teil (a) dieser Aufgabe.

3. **Kohärente Zustände** (8)
   Für die stationären Zustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators verschwinden die Erwartungswerte von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$. Zustände, bei denen die Erwartungswerte nicht verschwinden, sind beispielsweise Eigenzustände des Vernichtungsoperators $\mathbf{b}$ und werden als kohärente Zustände bezeichnet (siehe auch Gleichung (2.49b) der Vorlesung):
   $$\mathbf{b}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$$

   (a) Entwickle diesen Zustand in der Form
   $$|\alpha\rangle = \sum_n c_n(\alpha)\,|n\rangle$$
   und bestimme die Koeffizienten $c_n(\alpha)$.

   (b) Zeige und interpretiere die Relation
   $$e^{-\frac{it}{\hbar}\mathbf{H}}\,|\alpha\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left|\alpha e^{-i\omega t}\right\rangle.$$

   (c) Berechne $\langle\mathbf{x}\rangle_\alpha$ und $\langle\mathbf{p}\rangle_\alpha$.

   (d) Weshalb gibt es keine Eigenzustände dieser Form zum Erzeugungsoperator?