Übung 5 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 22.11.2023 / Besprechung: 24.11.2023

1. **Der eindimensionale harmonische Oszillator**(8)

   (a) Zeige für die Operatoren b, $b^\dagger$ mit der Kommutatorrelation $[b, b^\dagger] = 1$ die folgenden Beziehungen

   $$\left(b^\dagger\right)^n b^n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(b^\dagger b - j\right), \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{1a}$$

   $$b^n \left(b^\dagger\right)^n = \prod_{j=1}^{n} \left(b^\dagger b + j\right). \tag{1b}$$

   Wende hierzu vollständige Induktion an und benutze für (1a) u.a. $\left(b^\dagger b - j\right)b = b\left(b^\dagger b - j - 1\right)$ oder (1.102b) der Vorlesung, und für (1b) $\left(b^\dagger b + j\right)b^\dagger = b^\dagger\left(b^\dagger b + j + 1\right)$. Warum gelten diese Relationen?

   (b) Mit (1a) ist nun auch die Behauptung der Vorlesung nach (1.101) "die linke Seite kann als $P\left(b^\dagger b\right)$ geschrieben werden, wobei $P(.)$ ein Polynom ist" bewiesen. Benutze (1b) um die Normierung der in der Vorlesung konstruierten Eigenzustände wie (1.105) zu zeigen. Zeige zunächst, daß ϕ_0 wie in (1.93) gegeben normiert ist

   $$\phi_0(x) = \left(\frac{k_0}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}k_0^2 x^2\right). \tag{2}$$

   Zeige nun für $\tilde{\phi}_n := \left(b^\dagger\right)^n \phi_0$, daß

   $$\langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_n \rangle = n!\,, \tag{3}$$

   und begründe, daß (1.105) korrekt normiert ist.

2. **Der eindimensionale Potentialwall**(4)
   Zeige die in der Vorlesung zu $0 < E < V_0$ gemachten Aussagen (1.81) und (1.82).

3. **Die Spektralschar**(8)
   Um uns mit dem Konzept der Spektralschar vertraut zu machen, betrachten wir hier denn Fall des selbstadjungierten Operators $A = X$, dem Ortsoperator (in einer Raumdimension).

   (a) Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir wollen jeder Funktion $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ eine Funktion $\psi_a \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ zuordnen durch

   $$\psi_a(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{für } x < a \\ 0, & \text{für } x \geq a \end{cases} \tag{4}$$

   Diese Abbildung nennen wir $E(a)$, d.h.

   $$E(a): \quad \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \tag{5a}$$

   $$\psi \mapsto \psi_a\,. \tag{5b}$$

   Zeige, daß $E(a)$ für a beliebig aus $\mathbb{R}$ eine Spektralschar ist, u.a. gehört dazu, daß jedes $E(a)$ selbstadjungiert ist, $E(a)E(b) = E(b)E(a) = E(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $E(-\infty) = 0$, $E(\infty) = 1$ (=id), sowie linksseitige Stetigkeit gilt.

   (b) Zeige nun die Spektradarstellung von X mittels $E(a)$

   $$X = \int_{-\infty}^{\infty} a\, dE(a) \quad \text{bzw.} \quad \langle \psi | X | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a\, dE_\psi(a) \ \text{ mit } E_\psi(a) = \langle \psi | E(a) | \psi \rangle\,, \tag{6}$$

   Tipp: Zeige, daß $dE_\psi(a) = |\psi(a)|^2 da$.