Übung 4 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 15.11.2023 / Besprechung: 17.11.2023

Zur Zeit findet eine Umfrage des CHE zum bekannten CHE/ZEIT-Ranking der Universitäten statt. Bitte an alle Studierenden: nehmen Sie daran teil, wenn Sie vom CHE angeschrieben werden. Falls Sie nicht angeschrieben wurden, dies bitte in der Vorlesung oder Übungsstunde rückmelden.

1. **Der eindimensionale Potentialtopf** (20)
   Wir betrachten ein Potential $V(x)$, das innerhalb (außerhalb) des Intervalls $[-l/2, +l/2]$ den Wert $V(x) = -V_0$ $(= 0)$ annimmt mit $V_0 > 0$.

   Gesucht sind hier gebundene Zustände mit Energie $-V_0 < E < 0$.

   (a) Zeige, dass die Zustände die Form

   $$\psi(x) = \begin{cases} \mathsf{e}^{\varkappa x}, & x < -l/2, \\ C_+ \mathsf{e}^{\mathrm{i}Kx} + C_- \mathsf{e}^{-\mathrm{i}Kx}, & -l/2 \leq x \leq l/2, \\ \sigma \, \mathsf{e}^{-\varkappa x}, & x > l/2\,, \end{cases}$$

   haben müssen. Wie lauten $\varkappa$ und K? Insbesondere muß $\varkappa^2 + K^2 = 2mV_0/\hbar^2$ gelten.

   (b) Setze nun voraus, daß wegen der Symmetrie des Potentials die Lösungsfunktion gerade oder ungerade sein muß, d.h. $\psi(-x) = +\psi(x)$ oder $\psi(-x) = -\psi(x)$. Welche Werte muß σ annehmen? Und was bedeutet dies für C_-/C_+?

   (c) Welches Gleichungssystem folgt aus den Stetigkeitsbedingungen? Löse dieses Gleichungssystem in beiden Fällen. Zeige, daß es eine Konsistenzbedingung gibt,

   $$\varkappa = \begin{cases} +K \tan \frac{1}{2}Kl\,, & \text{(gerade)} \\ -K \cot \frac{1}{2}Kl\,, & \text{(ungerade)}\,. \end{cases} \tag{1}$$

   (d) Bestimme nun die Anzahl der Lösungen, indem Du die Graphen von $\varkappa(K)$ wie in den gerade hergeleiteten Konsistenzbedingungen (1) mit dem Graph von $\varkappa = \sqrt{2mV_0/\hbar^2 - K^2}$ schneidest. Dies sind die Eigenwertbedingungen.

   (e) Alternative Lösung: Benutze die algebraischen Ausdrücke für den Potentialtopf zu Energien $E > 0$ wie auf dem Übungsblatt 4 hergeleitet. Unter anderem lautet dort für die Reflexions- und Transmissionsamplituden

   $$r = \frac{\mathrm{i}\left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\sin Kl}{2\cos Kl - \mathrm{i}\left(\frac{1}{\xi} + \xi\right)\sin Kl}\mathsf{e}^{-\mathrm{i}kl}\,, \qquad t = \frac{2}{2\cos Kl - \mathrm{i}\left(\frac{1}{\xi} + \xi\right)\sin Kl}\mathsf{e}^{-\mathrm{i}kl}\,.$$

   Diese Ausdrücke gelten auch für $-V_0 < E < 0$, wobei jedoch die Größen k und ξ imaginär werden zu $k = \mathrm{i}\varkappa$ und $\xi = \mathrm{i}\varkappa/K$ mit reellem $\varkappa > 0$ (wie oben in dieser Aufgabe). Damit die Wellenfunktion wie auf Übungsblatt 4 bei $x \to -\infty$ nicht divergiert, darf in $\mathsf{e}^{\mathrm{i}kx} + r\,\mathsf{e}^{-\mathrm{i}kx}$ der erste Term nicht auftreten. Dies passiert, wenn die gesamte Wellenfunktion mit $1/r$ umnormiert wird, wir somit für $x < -l/2$ die Funktion $r^{-1}\,\mathsf{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathsf{e}^{-\mathrm{i}kx}$ vorliegen haben, und "aus welchen Gründen auch immer" $r^{-1} = 0$ bzw. $r = \infty$ gilt. Zeige, daß genau diese Bedingung besagt

   $$2\cos Kl - \mathrm{i}\left(\frac{1}{\xi} + \xi\right)\sin Kl = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tan Kl = \frac{2}{\frac{K}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{K}}\,. \tag{2}$$

   (f) Die Gleichungen (1) und (2) sehen recht verschieden aus, sind jedoch äquivalent. Zeige dies durch folgende Umformung

   $$\tan Kl = \frac{2}{\cot \frac{1}{2}Kl - \tan \frac{1}{2}Kl}\,. \tag{3}$$

   Warum gilt dies? Zeige nun, daß $\tan \frac{1}{2}Kl = ...$

   Zusatz: Welche Werte nimmt nun $1/\sigma = r/t = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\sin Kl$ an? Forme hierzu $\sin Kl = 2\tan\frac{1}{2}Kl/(1 + \tan^2 \frac{1}{2}Kl)$ um und setze $\tan \frac{1}{2}Kl$ ein.