Übung 3 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 08.11.2023 / Besprechung: 10.11.2023

1. **Der eindimensionale Potentialtopf** (13)
   Wir betrachten ein Potential $V(x)$, das innerhalb (außerhalb) des Intervalls $[-l/2, +l/2]$ den Wert $V(x) = -V_0$ $(= 0)$ annimmt mit $V_0 > 0$.

   Gesucht ist die stationäre Lösung der Schrödingergleichung, die eine von links einlaufende Welle mit Energie $E > 0$ beschreibt.

   (a) Zeige, dass
   $$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, & x < -l/2, \\ C_+\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx} + C_-\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx}, & -l/2 \le x \le l/2, \\ t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, & x > l/2\,. \end{cases}$$
   Wie lauten k und K?

   (b) Welches Gleichungssystem folgt aus den Stetigkeitsbedingungen?

   (c) Zeige, dass die Lösung lautet
   $$r = \frac{\mathrm{i}\left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\sin Kl}{2\cos Kl - \mathrm{i}\left(\frac{1}{\xi} + \xi\right)\sin Kl}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl}, \qquad t = \frac{2}{2\cos Kl - \mathrm{i}\left(\frac{1}{\xi} + \xi\right)\sin Kl}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl},$$
   $$C_\pm = \frac{(1 \pm \xi)}{2\cos Kl - \mathrm{i}\left(\frac{1}{\xi} + \xi\right)\sin Kl}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k \pm K)l/2}.$$

   (d) Betrachte den Grenzfall $V_0 \to \infty$, $l \to 0$, $V_0 l = \mu_0^2 = \text{const.}$

   (e) Berechne die zugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x)$ für alle drei Bereiche.

2. **Gammafunktion** (5)
   Die Gammafunktion ist für $\operatorname{Re} z > 0$ gegeben durch
   $$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t e^{-t} t^{z-1}.$$

   (a) Berechne $\Gamma(1)$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

   (b) Zeige, dass
   $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
   gilt. Was folgt damit für $\Gamma(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$?

   (c) Zeige, dass
   $$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{4^m m!}\sqrt{\pi}, \qquad m \in \mathbb{N}_0\,.$$

3. **Kommutatoren** (4)
   Beweise für die Kommutatoren von Impulsoperator $\vec{P}$, Ortsoperator $\vec{x}$ und Potential $V = V(\vec{x})$
   $$[P_\alpha, x_\beta] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta_{\alpha,\beta}\,, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{1}$$
   $$[P_\alpha, P_\beta] = [x_\alpha, x_\beta] = 0 \tag{2}$$
   $$[\vec{P}, V] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}(\vec{\nabla} V) \tag{3}$$
   Zeige dies durch Anwenden auf eine beliebige Funktion $\psi(x)$. [Für die letzte Relation ist zu rechnen bzw. zu vereinfachen $P_\alpha(V\psi) - V(P_\alpha\psi)$.]