Übung 2 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 01.11.2023 / Besprechung: 03.11.2023

1. **Translationsoperator II** (6)
   Es seien $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ zwei hermitesche Operatoren mit dem Kommutator $[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i\hbar$. Der Translationsoperator wird definiert über $\mathbf{T}(\lambda) = e^{-\frac{i\lambda\mathbf{p}}{\hbar}}$.
   (a) Zeige, dass der Translationsoperator unitär ist.
   (b) Zeige die Kommutatorrelation $[\mathbf{q}, \mathbf{T}(\lambda)] = \lambda\mathbf{T}(\lambda)$.
   (c) Zeige, dass jede reelle Zahl im Spektrum von $\mathbf{q}$ ist.
   (d) Zeige, dass alle Eigenwerte von $\mathbf{q}$ denselben Entartungsgrad aufweisen.

2. **Baker-Campbell-Hausdorff** (7)
   Die Ableitung eines von einem Parameter τ abhängenden Operators $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\tau)$ ist definiert als

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\tau} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathbf{A}(\tau+\epsilon) - \mathbf{A}(\tau)}{\epsilon}.$$

   Zeige die folgenden Relationen:
   (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{AB} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}\tau}$
   (b) $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}^{-1}}{\mathrm{d}\tau} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{A}^{-1}$
   (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}e^{i\mathbf{A}} = i\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\tau}e^{i\mathbf{A}}$ für $\left[\mathbf{A}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\tau}\right] = 0$
   (d) Beweise nun die Identität

$$e^{\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_n$$

   mit dem n-fachen Kommutator

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_n = [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \ldots, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\ldots]]], \qquad [\mathbf{A}, \mathbf{B}]_0 = \mathbf{B}.$$

   (Tipp: Ersetze hier $\mathbf{A} \to \lambda\mathbf{A}$ und berechne die n. Ableitung beider Seiten nach λ bei $\lambda = 0$.)
   (e) Zeige, dass mit $[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$ gilt:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$$

   (Tipp: Ersetze hier $\mathbf{A} \to \lambda\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \to \lambda\mathbf{B}$ und berechne die Ableitung beider Seiten (LS bzw. RS) nach λ. Ergebnis: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot$ LS bzw. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot$ RS. Benutze dazu auf der rechten Seite (d).)

3. **Gaußsches Wellenpaket** (7)
   Betrachte ein Gaußsches Wellenpaket

$$\psi(x) = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}e^{ik_0x}}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sigma}}.$$

   (a) Berechne die Mittelwerte

$$\langle\mathbf{x}\rangle, \left\langle\mathbf{x}^2\right\rangle, \langle\mathbf{p}\rangle \text{ und } \left\langle\mathbf{p}^2\right\rangle.$$

   (b) Berechne mit der Definition

$$(\triangle\mathbf{A})^2 = \left\langle\mathbf{A}^2\right\rangle - \langle\mathbf{A}\rangle^2$$

   das Unschärfeprodukt $\triangle\mathbf{x}\triangle\mathbf{p}$.
   (c) Bestimme die Stromdichte $j(x)$.
   (d) Berechne

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x j(x)$$

   und diskutiere, wie es mit Impuls und Geschwindigkeit des Teilchens zusammenhängt.