Übung 13 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 31.01.2024 / Besprechung: 02.02.2024

1. **Addition von Drehimpulsen I** (9)
   Wir betrachten die Addition von zwei Drehimpulsen $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ mit $j_1 = 1$ und $j_2 = 1/2$. Der Gesamtdrehimpuls wirkt wie in der Vorlesung beschrieben im 6-dimensionalen Raum, der aufgespannt wird durch die Basisvektoren

$$|1 m_1\rangle|\tfrac{1}{2} m_2\rangle\,, \qquad m_1 = -1, 0, 1,\ m_2 = -1/2, 1/2\,, \tag{1}$$

   wobei $\vec{J}_1$ auf den ersten Faktor, $\vec{J}_2$ auf den zweiten Faktor wirkt.

   (a) Zeige, daß der 6-dimensionale Raum in zwei Drehimpulsmultipletts zerfällt. Welche Drehimpulsquantenzahlen haben diese Multipletts?

   (b) Was ist der Zustand mit höchster $m = m_1 + m_2$ Quantenzahl? Dieser Zustand kann mit $|3/2, +3/2\rangle$ bezeichnet werden, d.h. ein Zustand mit $j = 3/2$ und $m = +3/2$. Wende $J^- = J_1^- + J_2^-$ auf diesen Zustand an und erhalte (bis auf Normierung) $|3/2, +1/2\rangle$.

   (c) Bestimme im 2-dim. Unterraum mit $m = m_1 + m_2 = 1/2$ den zu $|3/2, +1/2\rangle$ orthogonalen Zustand und nenne ihn $|1/2, +1/2\rangle$ (ohne Normierungsfragen zu beachten). Zeige, daß dieser Zustand von $J^+ = J_1^+ + J_2^+$ zu null gemacht wird.

   Bemerkung: Das Skalarprodukt im Produktraum ist das Produkt der Skalarprodukte in den einzelnen Faktoren: seien $|u\rangle = |v\rangle|w\rangle$ und $|\tilde{u}\rangle = |\tilde{v}\rangle|\tilde{w}\rangle$ so gilt

$$\langle \tilde{u}|u\rangle := \langle \tilde{v}|v\rangle\langle \tilde{w}|w\rangle\,. \tag{2}$$

2. **Addition von Drehimpulsen II** (7)
   Wir betrachten ein Molekül, in dem zwei Atome mit Spin $S_1 = 1$ und $S_2 = 1$ vorhanden sind. Es gibt eine effektive, sogenannte Austauschwechselwirkung im Molekül mit einem Hamiltonoperator

$$H = A\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B\,\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right)^2\,. \tag{3}$$

   der in einem $3 \cdot 3$-dimensionalen Raum wirkt.

   (a) Welche Eigenwerte besitzt der Operator

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\,, \tag{4}$$

   mit welcher Entartung?

   (b) Welche Eigenwerte besitzt H?

   (c) Gesucht ist ein Ausdruck für den Projektor P_0 auf den Singulett-Zustand im Produktraum. Betrachte den Ansatz

$$P_0 = c\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - a\right)\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - b\right)\,. \tag{5}$$

   Wie sind die Konstanten a, b, c zu wählen?

   Tipp: (1) Schreibe $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ wie in der Vorlesung um auf Quadrate von Spin-Operatoren. (2) Die Konstanten a, b haben mit den Eigenwerten von $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ zu tun.