Übung 12 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 24.01.2024 / Besprechung: 26.01.2024

1. **Lokalisiertes Elektron im Magnetfeld** (5)
   Betrachte ein an einem festen Ort lokalisiertes Elektron mit Spin in einem konstanten äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der Hamiltonoperator sei
   $$\mathbf{H} = -\vec{B}\vec{\boldsymbol{\mu}}$$
   mit $\vec{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{a\hbar}{2}\vec{\boldsymbol{\sigma}}$, der der Operator des magnetischen Dipolmoments ist und $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Gib die zeitabhängige Schrödingergleichung für den Zustandsvektor
   $$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \chi_+(t) \\ \chi_-(t) \end{pmatrix}$$
   an und löse diese durch den Separationsansatz
   $$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1 t}\alpha_+ \\ e^{-i\omega_2 t}\alpha_- \end{pmatrix}.$$

   (b) Zur Zeit $t = 0$ sei das Elektron im Eigenzustand von $\mathbf{S}_x$ mit dem Eigenwert $\frac{\hbar}{2}$. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit $t > 0$ bei einer Messung mit $\mathbf{S}_x$ den Wert $\frac{\hbar}{2}$ zu finden.

2. **Streuung an harter Kugel** (5)
   Betrachte die Streuung an einer harten Kugel
   $$V(r) = \begin{cases} \infty & , r < r_0 \\ 0 & , r > r_0 \end{cases}.$$
   Die radiale Wellenfunktion muss nach der Vorlesung von der Gestalt
   $$f(r) = A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)$$
   sein.

   (a) Was passiert für $r < r_0$. Was folgt daraus für $f(r_0)$?

   (b) Zeige, dass für $r \to \infty$ bei geeigneter Wahl von A_l und B_l
   $$f(r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right)$$
   folgt, wobei
   $$\tan\delta_l = -\frac{B_l}{A_l}$$
   ist.

   (c) Finde eine möglichst einfache Darstellung des Wirkungsquerschnitts
   $$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l.$$

   (d) Was folgt für σ_l für $l = 0$? Betrachte anschließend den Limes $k \to 0$ und interpretiere das Ergebnis.

3. **Drehimpuls-Operator und -Zustände** (2)
   Zeige mithilfe der Vertauschungsrelationen für J_x, J_y, J_z die folgenden Beziehungen:

   (a) $\langle jm|J_x|jm\rangle = \langle jm|J_y|jm\rangle = 0$,

(b) $\langle jm|J_x^2|jm\rangle = \langle jm|J_y^2|jm\rangle = \frac{1}{2}[j(j+1) - m^2]$,

wobei $|jm\rangle$ die üblichen Eigenzustände von J^2 und J_z sind.

4. **Variationsrechnung** (8)
Betrachte den anharmonischen Oszillator

$$H(\lambda) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda x^4 \,, \tag{1}$$

wobei λ ein kleiner positiver Parameter ist. Bestimme die Grundzustandsenergie $E_0(\lambda)$ mit folgendem Ansatz für die Wellenfunktion

$$\phi(x) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}k^2 x^2\right) \,. \tag{2}$$

Berechne den Erwartungswert von H in diesem Zustand und minimiere den Wert bezüglich k. Beachte: Dieser Ansatz ist der exakte Grundzustand für $\lambda = 0$, wenn Sie $k = k_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ wählen (siehe Vorlesung). Wie lautet k als Funktion von λ?

Vergleichen Sie die Energie mit dem Ergebnis aus Störungstheorie erster Ordnung wie auf Übungsblatt 11 behandelt.