

Übung 11 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper
Sergei Adler

(kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
(adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 17.01.2024 / Besprechung: 19.01.2024

1. Störungstheorie I (14)

Wir haben in der Vorlesung die störungstheoretische Berechnung des He-Grundzustands kennengelernt bzw. allgemeiner, die Behandlung des Grundzustandes eines Atoms mit Kernladungszahl Z und 2 Elektronen in der Atomhülle. Dabei wurde eine "Formel" für die Coulomb-Energie zweier Elektronen benutzt (5.21). Dies ist eine Formel, die auch in der Elektrodynamik im Rahmen der Multipolentwicklung benutzt wurde. Wir nehmen sie als gegeben an.

A) In der Vorlesung wurde behauptet, daß das 6-dimensionale Integral in (5.20) auf ein 2-dimensionales reduziert wird. Führe diese Schritte durch und zeige, daß im wesentlichen

$$\int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \frac{r_1^2 r_2^2}{r_>} \exp(-2(r_1 + r_2)/a), \quad r_> := \max(r_1, r_2) \quad (1)$$

zu berechnen ist. Wie kann man dieses Integral vereinfachen? Der Integrand zeigt eine $r_1 \leftrightarrow r_2$ Symmetrie. Daher gilt

$$\int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \dots = 2 \int_0^\infty dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \dots \quad (2)$$

Warum? Und wie vereinfacht sich nun der Ausdruck für $r_>$? Berechne dieses Integral und verifiziere (5.22) der Vorlesung.

B) Für Mutige: Berechne in ähnlicher Weise den angeregten Zustand $2s2s$. Benutze dazu die geeignete Radialwellenfunktion in (3.108) die mit $Y_{0,0} = 1/\sqrt{4\pi}$ multipliziert die Funktionen φ_{200} ergibt. Ziehe diese Rechnung durch.

Bem.: Der erste angeregte Zustand ist ein $1s2s$ Zustand, der aber noch einer gewissen Anti-Symmetrisierung bedarf. Dazu später mehr.

Bem.: Es ist völlig in Ordnung, wenn Sie an gewisser Stelle die vielen Terme mit Computer-Algebra zählen.

2. Störungstheorie II (6)

Betrachte den anharmonischen Oszillator

$$H(\lambda) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda x^4, \quad (3)$$

wobei λ ein kleiner positiver Parameter ist. Bestimme die Energieniveaus $E_n(\lambda)$ in Störungstheorie bis in linearer Ordnung in λ .