

Übung 10 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper
Sergei Adler

(kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
(adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 10.01.2024 / Besprechung: 12.01.2024

1. WKB-Methode der Quantenmechanik (9)

Betrachte die Schrödingergleichung für einen Hamiltonoperator $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U$ und den Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t)}, \quad A(\vec{r}, t), S(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}.$$

- (a) Zeige, dass die Schrödingergleichung in zwei gekoppelte Differentialgleichungen für die Amplitude $A = A(\vec{r}, t)$ und Phase $S = S(\vec{r}, t)$ geschrieben werden kann:

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla} S)^2 + U = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A}, \quad m \partial_t A + (\vec{\nabla} A)(\vec{\nabla} S) + \frac{A}{2} \Delta S = 0$$

- (b) Zeige, dass im stationären Fall

$$(\vec{\nabla} S)^2 - 2m(E - U) = \hbar^2 \frac{\Delta A}{A}, \quad \vec{\nabla} A^2 \vec{\nabla} S = 0$$

gilt.

- (c) Zeige, dass für den Strom $j(\vec{r}, t)$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 = A^2(\vec{r}, t)$

$$j(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{m} \vec{\nabla} S(\vec{r}, t)$$

gilt.

- (d) Betrachte den eindimensionalen stationären Fall und nimm an, dass sich das Potential nur langsam ändert. Daher kann A als konstant angenommen werden. Finde einen Integralausdruck für S .

2. Hellmann-Feynman-Theorem (6)

- (a) Sei $H(\lambda)$ ein hermitescher Operator und $|\psi(\lambda)\rangle$ ein normierte Eigenvektor zu $H(\lambda)$ zum Eigenwert $E(\lambda)$. Zeige, dass der folgende Ausdruck gilt:

$$\frac{d}{d\lambda} E(\lambda) = \left\langle \psi(\lambda) \left| \left(\frac{d}{d\lambda} H(\lambda) \right) \right| \psi(\lambda) \right\rangle \quad (1)$$

- (b) Betrachte nun den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad (2)$$

mit Eigenwerten $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Werte mit obiger Formel $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ und $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ aus und verifiziere

$$\Delta x \Delta p = (n + \frac{1}{2})\hbar. \quad (3)$$

- (c) Bestimme nun auf ähnliche Weise den Erwartungswert $\langle \frac{1}{r} \rangle$ für gebundene Zustände des Wasserstoffatoms.

3. Addition von Drehimpulsen (5)

Betrachte den 4-dimensionalen (Produkt-) Raum mit Basisvektoren

$$|m_1, m_2\rangle \equiv |m_1\rangle |m_2\rangle, \quad m_1 = \pm, m_2 = \pm. \quad (4)$$

wobei $m_i = \pm$ eine Kurzversion von $m_i = \pm \frac{1}{2}$ ist. Ferner sollen Drehimpuls-Operatoren $\vec{J}_1, \vec{J}_2$ in diesem Raum wirken, wobei $\vec{J}_1$ ($\vec{J}_2$) nur nicht-trivial auf den 1. (2.) Faktor in (4) wirke und zwar wie in der Spin- $\frac{1}{2}$

Darstellung. Wir nennen $\vec{J} := \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ den Gesamtdrehimpuls-Operator. Die Komponente J^x beispielsweise wirkt auf einen Basiszustand $|m_1, m_2\rangle$ wie

$$J^x|m_1, m_2\rangle = J_1^x|m_1\rangle|m_2\rangle + |m_1\rangle J_2^x|m_2\rangle \quad (5)$$

Beispiel

$$J^x|+, -\rangle = J_1^x|+\rangle|-\rangle + |+\rangle J_2^x|-\rangle = \frac{1}{2}|-\rangle|-\rangle + \frac{1}{2}|+\rangle|+\rangle = \frac{1}{2}|-, -\rangle + \frac{1}{2}|+, +\rangle \quad (6)$$

und “ganz einfach”

$$J^z|m_1, m_2\rangle = \dots = \frac{m_1 + m_2}{2}|m_1, m_2\rangle \quad (7)$$

Wenn Operatoren auf Linearkombinationen der vier Basiszustände wirken, so nutzt man natürlich die Linearität der Operatoren.

- (a) Zeige, daß in diesem 4-dimensionalen Raum zwei Höchstgewichtszustände existieren, also solche, die durch $J^+ = J_1^+ + J_2^+$ auf 0 abgebildet werden.
- (b) Die im vorigen Punkt ermittelten Zustände sind Eigenzustände zu J^z . Wie lauten die Eigenwerte?
- (c) Was sind die irreduziblen Darstellungen der $su(2)$ in dem 4-dimensionalen Raum, d.h. welche Gesamtdrehimpulse liegen vor?