Übung 1 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 25.10.2023 / Besprechung: 27.10.2023

1. **Kontinuitätsgleichung** (4)
   Zeige, dass die Kontinuitätsgleichung
   $$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\vec{j} = 0,$$
   mit dem folgenden Hamiltonoperator und der Stromdichte gilt
   $$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi + V, \\ \vec{j} &= \frac{1}{2m}\left(\psi^*\left(\vec{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\psi - \psi\left(\vec{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\psi^*\right). \end{aligned}$$
   Dabei ist $\rho = |\psi|^2$ die Teilchendichte und es gilt $\vec{A}^* = \vec{A}$, $\Phi^* = \Phi$ und $V^* = V$.

2. **Wellenpaket** (4)
   Berechne die Wellenfunktion eines freien Teilchens $\psi(x,t)$, wenn sie zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort x durch $\psi(x,0) = \delta(x)$ gegeben ist, und veranschauliche das Ergebnis durch die Wahrscheinlichkeitsdichte. Nutze hierfür
   $$\psi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p A(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}[px - E(p)t]}.$$
   Tipp: Bestimme zuerst $A(p)$ so, dass für $t = 0$ das Integral $\delta(x)$ liefert (Ergebnis ist einfach). Einsetzen und für allgemeines t das Gaußintegral lösen.

3. **Operatoren** (3)
   Betrachte die Operatoren
   $$\mathbf{O}_1\psi(x) := x^2\psi(x) \qquad \mathbf{O}_2\psi(x) := \left(i\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a\right)\psi(x) \qquad \mathbf{O}_3\psi(x) := x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x) \qquad \mathbf{O}_4\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}y\, y\psi(y).$$
   Berechne die Kommutatoren $[\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2]$, $[\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_3]$, $[\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_4]$, $[\mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3]$, $[\mathbf{O}_2, \mathbf{O}_4]$ und $[\mathbf{O}_3, \mathbf{O}_4]$.

4. **Translationsoperator** I (7)
   Der Translationsoperator $\mathbf{T}_a$ ($a \in \mathbb{R}$) ist auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ wie folgt definiert:
   $$\begin{aligned} \mathbf{T}_a : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \psi &\longmapsto \psi' : x \to \psi(x-a). \qquad \text{(hier ist } x \text{ das Argument)} \end{aligned}$$
   (a) Zeige die folgenden Eigenschaften des Translationsoperators:
   $$\mathbf{T}_a \circ \mathbf{T}_b = \mathbf{T}_{a+b}, \qquad \mathbf{T}_a^{-1} = \mathbf{T}_{-a}, \qquad \mathbf{T}_a^{-1} \circ x \circ \mathbf{T}_a = x + a. \qquad \text{(hier ist } x \text{ der Ortsoperator)}$$
   (b) Löse die Eigenwertgleichung
   $$\mathbf{T}_a\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x).$$
   (c) Überprüfe, ob auf dem Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen eine Darstellung des Translationsoperators gegeben ist durch:
   $$\mathbf{T}_a = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n.$$