Übung 0 für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Abgabe: 18.10.2023 / Besprechung: 20.10.2023

1. **Operatoren**
   Betrachte den Raum der quadratintegrablen Funktionen $L_2(\mathbb{R}) \ni \psi, \phi$ und die Operatoren $\mathbf{O}_j$:

$$\mathbf{O}_1\psi(x) := x^2\psi(x) \qquad \mathbf{O}_2\psi(x) := \left(i\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a\right)\psi(x) \qquad \mathbf{O}_3\psi(x) := x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$$

$$\mathbf{O}_4\psi(x) := \psi^*(x) \qquad \mathbf{O}_5\psi(x) := e^{i\psi(x)} \qquad \mathbf{O}_6\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}y\, y\psi(y)$$

$$\mathbf{O}_7\psi(x) := x\psi(x) \qquad \mathbf{O}_8\psi(x) := e^{\psi(x)} \qquad \mathbf{O}_9\psi(x) := \psi(-x)$$

   (a) Welche dieser Operatoren sind linear?

   (b) Ein linearer Operator $\mathbf{O}$ ist hermitesch, wenn gilt:

$$\langle \phi \mid \mathbf{O}\psi\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\phi^*(x)\left(\mathbf{O}\psi(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\left(\mathbf{O}\phi(x)\right)^*\psi(x) = \langle \mathbf{O}\phi \mid \psi\rangle$$

   Welcher der oberen Operatoren ist hermitesch?

2. **Kommutator**
   Der Kommutator $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ zweier Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist definiert als

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

   Zeige die folgende Eigenschaften:

   (a) $[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\mathbf{B}$

   (b) $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$

   (c) $[[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}] + [[\mathbf{B}, \mathbf{C}], \mathbf{A}] + [[\mathbf{C}, \mathbf{A}], \mathbf{B}] = 0$