

Probeklausur für Quantenmechanik im WS 2023/2024

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Sergei Adler (adler@uni-wuppertal.de D.10.06)

Formeln

Alle auf dieser Seite angegebenen Formel dürfen ohne Beweis benutzt werden.

- Harmonischer Oszillator:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} X + \frac{iP}{\sqrt{m\omega}} \right), \quad b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

- Drehimpuls:

$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

- Pauli-Matrizen:

$$e^{i\vec{\alpha}\vec{\sigma}} = \cos \alpha + i(\sin \alpha)\vec{n}\vec{\sigma}, \quad \vec{\alpha} = \alpha\vec{n}, \quad (|\vec{n}| = 1),$$
$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l$$
$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l$$

1. **Kurzfragen** (3 + 3 + 2 + 2 + 3 + 4 = 17)

- (a) Was versteht man unter einem vollständigen Satz kommutierender Operatoren?
- (b) Beweise, dass die Spur einer Matrix unabhängig von der Wahl der (Orthonormal) Basis ist.
- (c) Bleibt ein hermitescher Operator nach unitärer Transformation hermitesch?
- (d) Was besagt die Heisenbergsche Unschärferelation?
- (e) Welche Polynome haben Sie kennengelernt und wo spielen diese jeweils eine Rolle?
- (f) Beweise das Ehrenfestsche Theorem.

2. **Neutrales Teilchen im Magnetfeld** (10)

Finde (nicht normierte) stationäre Zustände und Eigenwerte für die Bewegung eines neutralen Teilchens mit Spin- $\frac{1}{2}$ und magnetischem Moment

$$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{\sigma},$$

in einem konstanten Magnetfeld beliebiger Richtung $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$.

3. **Energien** (3 + 3 + 4 = 10)

Betrachte ein physikalisches System in einem dreidimensionalen Zustandsraum mit dem Hamiltonoperator

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welche Werte findet man, wenn die Energie des Systems gemessen wird?
- (b) Angenommen ein Teilchen befinde sich im Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(i, -i, i)^t$. Wie lautet der Erwartungswert von H .
- (c) Berechne $\Delta H = \sqrt{\langle H^2 \rangle_\psi - \langle H \rangle_\psi^2}$.

4. **Potentialstufe** (4 + 6 + 8 = 18)

Betrachte das eindimensionale Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & : x < 0 \\ V_2 & : x \geq 0 \end{cases}, \quad V_2 > V_1.$$

Die gesuchte stationäre Lösung soll eine von links einlaufende Welle beschreiben. Betrachte den Fall $V_1 < E < V_2$.

- (a) Gib die allgemeine Lösung für die Wellenfunktion an.
- (b) Bestimme die freien Konstanten aus den Stetigkeitsbedingungen und gib explizit die Lösung an und stelle sie grafisch dar.
- (c) Gib die Wahrscheinlichkeitsstromdichte in allen Bereichen an, sowie den Reflexionskoeffizienten und interpretiere das Ergebnis.

5. **Der harmonische Oszillator** (3 + 3 + 2 = 8)

Betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator und berechne die Erwartungswerte

$$\langle n | P^2 | n \rangle, \quad \langle n | Px | n \rangle, \quad \langle n | x^2 P | n \rangle.$$

6. **Bahndrehimpuls** (7 + 5 = 12)

Seien $|l, m\rangle$ die eindeutig durch Angabe von $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$ bestimmten gemeinsamen, orthonormalen Eigenzustände von \vec{L}^2 und L_z mit

$$\vec{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle, \quad L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle.$$

- (a) Berechne die Erwartungswerte $\langle L_x \rangle$, $\langle L_y \rangle$, $\langle L_x L_y \rangle$, $\langle L_y L_z \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$ und $\langle L_y^2 \rangle$ bezüglich des Zustands $|l, m\rangle$.
- (b) Überprüfe

$$(\Delta L_x)^2 (\Delta L_y)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [L_x, L_y] \rangle|^2.$$

7. **Rotationen** (10 + 7 + 8 = 25)

Wir betrachten ein Spin- $\frac{1}{2}$ -System. Der Operator $S_{z,\varphi}$ ist definiert durch

$$S_{z,\varphi} = e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_y} S_z e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma_y}$$

und kann als $S_{z,\varphi} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\vec{e}_\varphi$ mit einer zu bestimmenden Quantisierungsachse \vec{e}_φ geschrieben werden.

- Berechne $S_{z,\varphi}$ für beliebige φ und bestimme \vec{e}_φ .
- Berechne $S_{z,\varphi}$ für infinitesimale φ bis zur einschließlich ersten Ordnung in φ durch Entwicklung der Exponentialfunktionen und vergleiche das Ergebnis mit Teilaufgabe a).
- Überprüfe das Resultat aus Teilaufgabe a) durch die Wahl $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

8. **Störungstheorie** (2 + 4 + 4 + 4 + 11 = 25)

Ein Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen in einem magnetischen Feld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ werde beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$H^0 = \mu\vec{\sigma}\vec{B}, \quad \mu < 0.$$

Die Energie-Eigenzustände zu den Eigenwerten $E_\pm^0 = \pm\mu B$ seien $|+\rangle = \vec{e}_1$ und $|-\rangle = \vec{e}_2$. Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle).$$

- Wie lautet $|\psi(t)\rangle$ explizit?
- Bestimme einen normierten Eigenzustand $|-\frac{\hbar}{2}\rangle$ zu S_y mit dem Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Messung des Spins in y -Richtung zum Zeitpunkt $t > 0$ den Wert $-\frac{\hbar}{2}$?
- Es sei nun ein zusätzliches Magnetfeld $\vec{B}_1 = \lambda B (\cos\theta, \sin\theta, 0)^t$ mit $\lambda \ll 1$ angelegt. Der Hamiltonoperator hat also die Form

$$H = \mu\vec{\sigma}(\vec{B} + \vec{B}_1).$$

Wie lauten jetzt die Energie-Niveaus E_\pm und die Eigenzustände $|\psi_\pm\rangle$ des Systems exakt?

- Wie lauten die Energie-Niveaus E_\pm und die Eigenzustände $|\psi_\pm\rangle$ des Systems zur ersten nicht verschwindenden Ordnung in λ ? Vergleiche das Ergebnis mit der exakten Lösung.