Probeklausur für Quantenmechanik im WS 2020/2021

Prof. Dr. Andreas Klümper	(kluemper@uni-wuppertal.de	D.10.07)
Jan Mathis Giesen	(jan.giesen@uni-wuppertal.de	G.11.07)
Svyatoslav Karabin	(sv.karabin@gmail.com	G.12.22)

Achtung/Attention:
Klausur voraussichtlich am 09.04.2021, Realisierung pandemieabhängig.
Written examination on 09.04.2021, the realization is dependent on the pandemic.

Formeln/Formulas

Alle auf dieser Seite angegebenen Formel dürfen ohne Beweis benutzt werden.
The formulas on this page may be used without giving proof.

- Harmonischer Oszillator/harmonic oscillator:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, X + \frac{\mathrm{i}P}{\sqrt{m\omega}} \right), \qquad b\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \qquad b^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

- Drehimpuls/angular momentum:

$$J_\pm\,|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j\,(j+1) - m\,(m\pm 1)}\,|j,m\pm 1\rangle$$

- Pauli-Matrizen/Pauli matrices:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\vec{\alpha}\vec{\sigma}} &= \cos\alpha + \mathrm{i}(\sin\alpha)\vec{n}\vec{\sigma},\ \ \vec{\alpha} = \alpha\vec{n},\ \ (|\vec{n}| = 1), \\ [\sigma_j, \sigma_k] &= 2\mathrm{i}\sum_l \epsilon_{jkl}\sigma_l \\ \sigma_j\sigma_k &= \delta_{jk} + \mathrm{i}\sum_l \epsilon_{jkl}\sigma_l \end{aligned}$$

1. **Kurzfragen** $(3+3+2+2+3+4=17)$
   (a) Was versteht man unter einem vollständigen Satz kommutierender Operatoren?
   (b) Beweise, dass die Spur einer Matrix unabhängig von der Wahl der (Orthonormal) Basis ist.
   (c) Bleibt ein hermitescher Operator nach unitärer Transformation hermitesch?
   (d) Was besagt die Heisenbergsche Unschärferelation?
   (e) Welche Polynome haben Sie kennengelernt und wo spielen diese jeweils eine Rolle?
   (f) Beweise das Ehrenfestsche Theorem.

2. **Neutrales Teilchen im Magnetfeld** (10)
   Finde (nicht normierte) stationäre Zustände und Eigenwerte für die Bewegung eines neutralen Teilchens mit Spin-$\frac{1}{2}$ und magnetischem Moment
   $$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{\sigma},$$
   in einem konstanten Magnetfeld beliebiger Richtung $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$.

3. **Energien** $(3+3+4=10)$
   Betrachte ein physikalisches System in einem dreidimensionalen Zustandsraum mit dem Hamiltonoperator
   $$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$
   (a) Welche Werte findet man, wenn die Energie des Systems gemessen wird?
   (b) Angenommen ein Teilchen befinde sich im Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{i}, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\right)^t$. Wie lautet der Erwartungswert von H.
   (c) Berechne $\triangle H = \sqrt{\langle H^2\rangle_\psi - \langle H\rangle_\psi^2}$.

4. **Potentialstufe** $(4+6+8=18)$
   Betrachte das eindimensionale Potential
   $$V(x) = \begin{cases} V_1 & : x < 0 \\ V_2 & : x \geq 0 \end{cases}, \qquad V_2 > V_1.$$
   Die gesuchte stationäre Lösung soll eine von links einlaufende Welle beschreiben. Betrachte den Fall $V_1 < E < V_2$.
   (a) Gib die allgemeine Lösung für die Wellenfunktion an.
   (b) Bestimme die freien Konstanten aus den Stetigkeitsbedingungen und gib explizit die Lösung an und stelle sie grafisch dar.
   (c) Gib die Wahrscheinlichkeitsstromdichte in allen Bereichen an, sowie den Reflexionskoeffizienten und interpretiere das Ergebnis.

5. **Der harmonische Oszillator** $(3+3+2=8)$
   Betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator und berechne die Erwartungswerte
   $$\left\langle n \mid P^2 \mid n \right\rangle, \qquad \langle n \mid Px \mid n \rangle, \qquad \left\langle n \mid x^2 P \mid n \right\rangle.$$

6. **Bahndrehimpuls** $(7+5=12)$
   Seien $|l, m\rangle$ die eindeutig durch Angabe von $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$ bestimmten gemeinsamen, orthonormalen Eigenzustände von $\vec{L}^2$ und L_z mit
   $$\vec{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle, \qquad L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle.$$
   (a) Berechne die Erwartungswerte $\langle L_x\rangle$, $\langle L_y\rangle$, $\langle L_x L_y\rangle$, $\langle L_y L_z\rangle$, $\left\langle L_x^2\right\rangle$ und $\left\langle L_y^2\right\rangle$ bezüglich des Zustands $|l, m\rangle$.
   (b) Überprüfe
   $$(\triangle L_x)^2 (\triangle L_y)^2 \geq \frac{1}{4} \left|\langle [L_x, L_y]\rangle\right|^2.$$

7. **Rotationen** $(10+7+8=25)$
   Wir betrachten ein Spin-$\frac{1}{2}$-System. Der Operator $S_{z,\varphi}$ ist definiert durch

$$S_{z,\varphi} = e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_y} S_z e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma_y}$$

   und kann als $S_{z,\varphi} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\vec{e}_\varphi$ mit einer zu bestimmenden Quantisierungsachse $\vec{e}_\varphi$ geschrieben werden.

   (a) Berechne $S_{z,\varphi}$ für beliebige φ und bestimme $\vec{e}_\varphi$.

   (b) Berechne $S_{z,\varphi}$ für infinitesimale φ bis zur einschließlich ersten Ordnung in φ durch Entwicklung der Exponentialfunktionen und vergleiche das Ergebnis mit Teilaufgabe a).

   (c) Überprüfe das Resultat aus Teilaufgabe a) durch die Wahl $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

8. **Störungstheorie** $(2+4+4+4+11=25)$
   Ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem magnetischen Feld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ werde beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$H^0 = \mu\vec{\sigma}\vec{B}, \qquad \mu < 0.$$

   Die Energie-Eigenzustände zu den Eigenwerten $E^0_\pm = \pm\mu B$ seien $|+\rangle = \vec{e}_1$ und $|-\rangle = \vec{e}_2$. Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t=0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right).$$

   (a) Wie lautet $|\psi(t)\rangle$ explizit?

   (b) Bestimme einen normierten Eigenzustand $\left|-\frac{\hbar}{2}\right\rangle$ zu S_y mit dem Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$.

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Messung des Spins in y-Richtung zum Zeitpunkt $t>0$ den Wert $-\frac{\hbar}{2}$?

   (d) Es sei nun ein zusätzliches Magnetfeld $\vec{B}_1 = \lambda B\left(\cos\theta, \sin\theta, 0\right)^t$ mit $\lambda \ll 1$ angelegt. Der Hamiltonoperator hat also die Form

$$H = \mu\vec{\sigma}\left(\vec{B} + \vec{B}_1\right).$$

   Wie lauten jetzt die Energie-Niveaus $E_\pm$ und die Eigenzustände $|\psi_\pm\rangle$ des Systems exakt?

   (e) Wie lauten die Energie-Niveaus $E_\pm$ und die Eigenzustände $|\psi_\pm\rangle$ des Systems zur ersten nicht verschwindenden Ordnung in λ? Vergleiche das Ergebnis mit der exakten Lösung.

1. **Short questions** $(3+3+2+2+3+4=17)$

   (a) What is a complete set of commuting operators?

   (b) Prove that the trace of a matrix is independent of the choice of the (orthonormal) basis.

   (c) Does a Hermitian operator remain Hermitian after a unitary transformation?

   (d) What does the Heisenberg uncertainty principle mean?

   (e) Which polynomials did you get to know and where do they play a role?

   (f) Prove Ehrenfest's theorem.

2. **Neutral particle in a magnetic field** (10)
   Find (non-normalized) stationary states and eigenvalues for the motion of a neutral particle with spin-$\frac{1}{2}$ and magnetic moment
   $$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{\sigma},$$
   in a constant magnetic field of arbitrary direction $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$.

3. **Energies** $(3+3+4=10)$
   Consider a physical system in a three-dimensional state space with Hamiltonian
   $$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Which values are found when the energy of the system is measured?

   (b) Assuming a particle is in the state $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathrm{i}, -\mathrm{i}, \mathrm{i})^t$. What is the expection value of H.

   (c) Calculate $\triangle H = \sqrt{\langle H^2 \rangle_\psi - \langle H \rangle_\psi^2}$.

4. **Potential step** $(4+6+8=18)$
   Consider the one-dimensional potential
   $$V(x) = \begin{cases} V_1 & : x < 0 \\ V_2 & : x \geq 0 \end{cases}, \qquad V_2 > V_1.$$
   The stationary solution sought should describe a wave entering from the left. Consider the case $V_1 < E < V_2$.

   (a) Give the general solution for the wave function.

   (b) Determine the free constants from the continuity conditions and give the solution explicitly and represent it graphically.

   (c) Give the probability current density in all areas as well as the reflection coefficient and interpret the result.

5. **The harmonic oscillator** $(3+3+2=8)$
   Consider the one-dimensional harmonic oscillator and calculate the expectation values
   $$\langle n \mid P^2 \mid n \rangle, \qquad \langle n \mid Px \mid n \rangle, \qquad \langle n \mid x^2 P \mid n \rangle.$$

6. **Orbital angular momentum** $(7+5=12)$
   Let $|l, m\rangle$ with $l \in \mathbb{N}_0$ and $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$ be the uniquely specified orthonormal eigen-states of $\vec{L}^2$ and L_z with
   $$\vec{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l (l+1) |l, m\rangle, \qquad L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle.$$

   (a) Calculate the expectation values $\langle L_x \rangle$, $\langle L_y \rangle$, $\langle L_x L_y \rangle$, $\langle L_y L_z \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$ and $\langle L_y^2 \rangle$ with respect to the state $|l, m\rangle$.

   (b) Check
   $$(\triangle L_x)^2 (\triangle L_y)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [L_x, L_y] \rangle|^2.$$

7. **Rotations** $(10+7+8=25)$
We consider a spin $\frac{1}{2}$ system. The operator $S_{z,\varphi}$ is defined by

$$S_{z,\varphi} = e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_y} S_z e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma_y}$$

and can be written as $S_{z,\varphi} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\vec{e}_\varphi$ with a quantization axis $\vec{e}_\varphi$ to be determined.

   (a) Compute $S_{z,\varphi}$ for any φ and determine $\vec{e}_\varphi$.
   (b) Compute $S_{z,\varphi}$ for infinitesimal φ up to and including the first order in φ through expansion of the exponential functions and compare the result with subtask a).
   (c) Check the result of subtask a) by choosing $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

8. **Perturbation theory** $(2+4+4+4+11=25)$
A spin $\frac{1}{2}$ particle in a magnetic field $\vec{B} = B\vec{e}_z$ is described by the Hamiltonian

$$H^0 = \mu\vec{\sigma}\vec{B}, \qquad \mu < 0.$$

The energy eigenstates for the eigenvalues $E^0_\pm = \pm\mu B$ are $|+\rangle = \vec{e}_1$ and $|-\rangle = \vec{e}_2$. At time $t=0$ the system is in the state

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right).$$

   (a) What is $|\psi(t)\rangle$ explicitly?
   (b) Determine a normalized eigenstate $\left|-\frac{\hbar}{2}\right\rangle$ to S_y with the eigenvalue $-\frac{\hbar}{2}$.
   (c) What is the probability for the measurement of the spin in y-direction at time $t>0$ yielding the value $-\frac{\hbar}{2}$?
   (d) Let us now apply an additional magnetic field $\vec{B}_1 = \lambda B(\cos\theta, \sin\theta, 0)^t$ with $\lambda \ll 1$. So the Hamiltonian has the form

$$H = \mu\vec{\sigma}\left(\vec{B} + \vec{B}_1\right).$$

   What are the exact energy levels $E_\pm$ and the eigen-states $|\psi_\pm\rangle$ of the system?
   (e) What are the energy levels $E_\pm$ and the eigen-states $|\psi_\pm\rangle$ of the system in the first non-vanishing order in λ? Compare the result with the exact solution.