Übung 9 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2020

Prof. Dr. Andreas Klümper	(kluemper@uni-wuppertal.de	D.10.07)
Dennis Wagner	(dennis.wagner@uni-wuppertal.de	D.10.04)

Abgabe: 26.06.2020 / Besprechung: 29.06.2020

1. **Fourierreihen** (10)
In dieser Aufgabe soll das Überschwingen von Fourierreihen an Unstetigkeitsstellen, das sogenannte Gibbssche Phänomen, untersucht werden. Betrachte hierzu folgende unstetige, 2π-periodische Rechtecksfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} -a & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \\ a & \text{für} \quad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, \pi \end{cases}$$

Die Folge der Fourierpartialsummen

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f(x) e^{-inx}$$

konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen $f(x)$.

(a) Zeige, dass man $f_{2N+1}(x)$ darstellen kann als

$$f_{2N+1}(x) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

(b) Zeichne die Fouriersummen $f_3(x)$, $f_9(x)$, $f_{33}(x)$, $f_{129}(x)$, $f(x)$ (mit Hilfe des Computers) in ein Diagramm für $a = 1$ und $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Was fällt auf?

(c) Zeige mit Hilfe der Formel

$$2 \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \int_0^x \mathrm{d}t \frac{\sin((2N+1)t)}{\sin t},$$

dass im Intervall $[0, \pi]$ die relativen Extremwerte von $f_{2N+1}(x)$ bei $x_m = \frac{\pi m}{2N+1}$, $m = 1, \ldots, 2N$ liegen.

(d) Berechne $f_{2N+1}(x_1)$ im Limes $N \to \infty$. Substituiere zuerst $t' = (2N+1)t$ und beachte, daß

$$\lim_{N\to\infty} (2N+1) \sin\left(\frac{t'}{2N+1}\right) = t'$$

ist. Benutze dann den Wert des Integralsinus

$$\frac{2}{\pi} \mathrm{Si}(\pi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}t' \frac{\sin t'}{t'} \approx 1.179.$$

(e) Berechne

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f_{2N+1}(x_1) - f(x_1)}{f(x_1)}$$

und interpretiere das Ergebnis.

2. **Drehimpulsoperator** (10)
Wir definieren den Drehimpulsoperator (wobei hier $\hbar = 1$ gesetzt wird) wie in der Vorlesung mittels kartesischer Koordinaten

$$\vec{L} = -\mathrm{i}\vec{r} \times \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} , \quad \text{z.B.} \quad L_z = -\mathrm{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) .$$

Berechne die Kommutatoren bzw. zeige, daß

$$[L_x, L_y] = \mathrm{i}L_z\,, \quad [L_y, L_z] = \mathrm{i}L_x\,, \quad [L_z, L_x] = \mathrm{i}L_y\,.$$

Schließe hieraus

$$\left[L_z, L^{\pm}\right] = \pm L^{\pm}\,, \quad L^{\pm} := L_x \pm \mathrm{i}L_y\,,$$

sowie

$$\left[\vec{L}^2, L_{x,y,z}\right] = 0\,.$$