Übung 8 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2020

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Dennis Wagner (dennis.wagner@uni-wuppertal.de D.10.04)

Abgabe: 19.06.2020 / Besprechung: 22.06.2020

1. **Grundlegendes zu Hamilton- und Auf/Absteige-Operatoren** (4)
Diese Aufgabe flankiert die gerade in der Vorlesung begonnene Behandlung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators.

   (a) Zeige, daß Eigenzustände ψ_1 und ψ_2 zu einem Hamiltonoperator H mit verschiedenen Eigenwerten $E_1 \neq E_2$ orthogonal sind. Betrachte dazu $\langle \psi_1 | H \psi_2 \rangle$ und forme dies auf zwei Weisen um.

   (b) Zeige für Operatoren b, b^+ mit der Eigenschaft $[b, b^+] = bb^+ - b^+b = 1$ die in der Vorlesung bereits benutzte Eigenschaft
$$b\left(b^+\right)^n = n\left(b^+\right)^{n-1} + \left(b^+\right)^n b \, .$$
   Tipp: Vollständige Induktion.

2. **Landau-Niveaus von Elektronen in Schichtsystemen** (8)
In der Quantenmechanik lassen sich die Zustände von freien Elektronen in zweidimensionalen Schichtsystemen mit transversalem Magnetfeld durch komplexe Funktionen $\psi(z)$ beschreiben, die folgender Gleichung genügen:
$$\mathbf{D}^+\mathbf{D}\psi(z) = n\psi(z) \, , \qquad n \in \mathbb{N}_0$$
Hierbei sind $\mathbf{D}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{z} - \partial_z\right)$ und $\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z + \partial_{\overline{z}}\right)$. Die Zahl n legt die Energie des Elektrons fest und wird auch Landau-Niveau genannt. Wir suchen im Folgenden Lösungen dieser Gleichung.

   (a) Warum ist das Spektrum von $\mathbf{D}^+\mathbf{D}$ gleich $\mathbb{N}_0$? (Folgere dies u.a. aus den Kommutatoreigenschaften von $\mathbf{D}$ und $\mathbf{D}^+$.)

   (b) Wähle den Ansatz $\psi(z) = \varphi(z)\, e^{-|z|^2}$. Welcher Gleichung genügt $\varphi(z)$?

   (c) Welches Landau-Niveau n ergibt sich für holomorphe Funktionen $\varphi(z)$?

   (d) Gib alle Lösungen für $n = 1$ an.

3. **Integration** (8)
Wir wollen Integrale vom Typ
$$\int_0^\infty dx f(x)\, , \quad \text{bzw.} \int_{-\infty}^0 dx f(x)\, ,$$
für eine Funktion $f(z)$ mit "geeigneten Eigenschaften" berechnen lernen. Konkret wollen wir
$$\int_{-\infty}^0 dx \frac{1}{1 - x^3}\, ,$$
ohne Partialbruchzerlegung rechnen.

   (a) Überlege
$$\int_{-\infty}^0 dx \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathcal{L}} dz \frac{\log z}{1 - z^3}\, ,$$
   wobei hier "log" der Logarithmus mit Standardverzweigungsschnitt $]-\infty, 0]$ ist und $\mathcal{L}$ ist ein Weg im Komplexen, der die negative reelle Halbachse dicht oberhalb von $-\infty$ bis 0 abläuft und dann unterhalb der Halbachse zurück nach $-\infty$ läuft. (Zeichnung!)

(b) Definiere den Weg $\mathcal{C}$ durch einen großen Kreises beginnend bei $-\infty - \mathrm{i}\epsilon$, im mathematisch positiven Sinn um den Ursprung laufend bis $-\infty + \mathrm{i}\epsilon$. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathcal{C}} dz \frac{\log z}{1 - z^3} = 0 \,.$$

Warum?

(c) Nun gilt

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{1 - x^3} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}} dz \frac{\log z}{1 - z^3} \,,$$

wobei $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ die Hintereinanderausführung von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{C}$ ist und einen geschlossenen Weg darstellt. Im umlaufenen Gebiet ist der Integrand eine meromorphe Funktion, d.h. holomorph bis auf einige Polstellen. Wende den Residuensatz an. Das Endergebnis ist $2\pi/3\sqrt{3}$.