Übung 7 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2020

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Dennis Wagner (dennis.wagner@uni-wuppertal.de D.10.04)

Abgabe: 12.06.2020 / Besprechung: 15.06.2020

1. **Hydrodynamik** (12)
In der Vorlesung haben Sie die Erklärung zum Magnus-Effekt kennengelernt. Grundlegend dazu war die Konstruktion einer außerhalb von $z = 0$ holomorphen Funktion $\Omega(z)$ mit der asymptotischen Eigenschaft $\Omega'(z) \simeq 1$. Das Geschwindigkeitsfeld $v(z)$ ist dabei die komplex konjugierte Funktion zu $\Omega'(z)$, die Niveau-Linien $\operatorname{Im}\Omega(z) =$ konstant liefern die Strömungslinien.

   Es gibt zwei Staupunkte z_1 und z_2, d.h. $\Omega'(z_1) = \Omega'(z_2) = 0$, die auf der gleichen Strömungslinie liegen $\operatorname{Im}\Omega(z_1) = \operatorname{Im}\Omega(z_2)$. Diese Strömungslinie hat daher eine Komponente, die den Punkt $z = 0$ (kreisförmig) umschließt.

   Wir wollen hier die in der Vorlesung hergeleitete Funktion neu herleiten und zwar aus den oben genannten Prinzipien und dann verallgemeinern.

   (a) Definiere eine Funktion $\Omega(z)$ durch die Eigenschaft

$$\Omega'(z) = \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z}\right)$$

   Zeigen Sie, daß die oben genannten Eigenschaften von $\Omega'(z)$ erfüllt sind.

   (b) Betrachten Sie nun die Stammfunktion $\Omega(z)$. Wir verlangen zwei Eigenschaften:

   (i) Der Imaginärteil ist wohldefiniert, er hat bei Umlauf um $z = 0$ keinen Sprung. Dies liefert die Forderung $z_1 + z_2$ ist rein imaginär.

   (ii) Die Punkte z_1, z_2 liegen auf der gleichen Strömungslinie.

   Diese Bedingungen sind mit $z_{1/2} = -\mathrm{i}R\exp(\pm\mathrm{i}\phi)$ erfüllbar und liefern die Funktion der Vorlesung.

   (c) Betrachten Sie nun ein Geschwindigkeitsfeld mit drei Staupunkten, d.h.

$$\Omega'(z) = \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z}\right)\left(1 - \frac{z_3}{z}\right)$$

   Zeigen Sie, daß mit dem Ansatz $z_{1/2} = -\mathrm{i}R\exp(\pm\mathrm{i}\phi)$ und $z_3 = \mathrm{i}h$ mit reellen (positiven) R, ϕ, h alle Bedingungen erfüllbar sind. Allgemein liegen z_1 und z_2 auf der gleichen Strömungslinie.

   (d) Plotten Sie die Strömungslinien für den Fall $R = 1.3$, $h = 0.5$ und ϕ bei 1.0 und 0.5495384223. Plotten Sie insbesondere die Strömungslinie, auf der z_1 und z_2 liegen. Sie beobachten, daß in einem der beiden Fälle für ϕ auch der dritte Staupunkt auf der gleichen Linie liegt. Die Bedingungsgleichung für diese Koinzidenz ist übrigens (nicht Aufgabenbestandteil):

$$\cos^2\phi + 2\frac{R}{h}\left(1 - \log\frac{R}{h}\right)\cos\phi + \left(\frac{3}{2} + \log\frac{R}{h} - \frac{R^2}{2h^2}\right) = 0\,.$$

2. **Wärmeleitungsgleichung** (8)
Die inhomogene, eindimensionale Wärmeleitungsgleichung lautet

$$\frac{\rho C_P}{\lambda}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

   mit den Konstanten ρ, C_P und λ.

(a) Nutze nun die Fouriertransformation

$$T\left(x,t\right)=\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{d}k\tilde{T}\left(k,t\right)e^{ikx},$$

um aus der Wärmeleitungsgleichung $\tilde{T}\left(k,t\right)$ zu bestimmen.

(b) Wie bestimmt man $\tilde{T}\left(k,0\right)$?

(c) Führe nun das volle Rechenprogramm durch für ein Anfangsprofil der Temperatur $T(x,0)=\delta(x)$ mit der "punktförmigen" δ-Funktion. Wenn Dir diese Funktion unheimlich ist, verwende einfach, daß die Fouriertransformierte $\tilde{T}\left(k,0\right)$ unabhängig von k gleich $1/(2\pi)$ ist. (Berechne zuerst $\tilde{T}\left(k,t\right)$ für $t>0$ und dann $T\left(x,t\right)$, wofür Du die Fouriertransformation der Gaußfunktion brauchst.)