Übung 6 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2020

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Dennis Wagner (dennis.wagner@uni-wuppertal.de D.10.04)

Abgabe: 05.06.2020 / Besprechung: 08.06.2020

1. **Stirling-Formel** (10)
   Zeige für $z \to +\infty$
   $$\log \Gamma(z+1) = (z + \tfrac{1}{2}) \log z - z + \tfrac{1}{2} \log(2\pi) + \mathcal{O}(1/z)\,.$$
   Benutze dazu die Integralformel der Γ-Funktion und schreibe den Integranden als $\exp(-t + z \log t)$. Entwickle die Funktion $t \to -t + z \log t$ bis zur 2. Ordnung um die Lage des Maximums. Setze in das Integral ein und führe dies aus. (Dieses Verfahren ist eine Variante der sogenannten Sattelpunktsintegration.)

   Was ist der Gültigkeitsbereich der Asymptotik? Gilt diese nur für $z \to +\infty$, also nur für positive reelle Argumente oder sind auch komplexe Werte erlaubt?

2. **Integral um einen Verzweigungsschnitt** (10)
   Betrachte die Funktion $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ mit einem Verzweigungsschnitt entlang der reellen Achse von -1 bis 1. Es soll das Integral entlang einer geschlossenen Kurve gegen den Uhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn, um den Verzweigungsschnitt herum auf zwei verschiedene Weisen berechnet werden.

   (a) Wähle als geschlossene Kurve einen Kreis mit großem Radius und schreibe die Funktion $f(z)$ wie folgt um:
   $$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = z\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$$
   Benutze nun die Entwicklung der Wurzel $\sqrt{1-w} = 1 - \frac{w}{2} + \mathcal{O}\left(w^2\right)$ für betragsmäßig kleine $w \in \mathbb{C}$. Warum darf die Entwicklung an dieser Stelle abgebrochen werden?

   (b) Wähle als geschlossene Kurve ein Rechteck mit den Eckpunkten $(-1 - i\epsilon)$, $(1 - i\epsilon)$, $(1 + i\epsilon)$ und $(-1 - i\epsilon)$ und berechne den Limes $\epsilon \to 0$. Beachte hierbei dass
   $$\lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{(t \pm i\epsilon)^2 - 1} = \pm i \sqrt{1 - t^2}$$
   für alle $t \in [-1, 1]$ gilt.