Übung 5 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2020

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Dennis Wagner (dennis.wagner@uni-wuppertal.de D.10.04)

Abgabe: 29.05.2020 / Besprechung: 01.06.2020

1. **Singularitäten** (6)
   Bestimme von folgenden Funktionen alle Singularitäten und deren Typ (Polstelle, Ordnung? sonstiges?):

   (a)
   $$f(z) = \frac{z^2 + i}{z^4 + 1},$$
   (b)
   $$f(z) = \cos\frac{1}{z},$$
   (c)
   $$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}.$$

2. **Laurent-Reihe** (6)
   Entwickle
   $$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$
   in eine Laurent-Reihe

   (a) um $z = 0$ im Kreisring $0 < |z| < 1$,
   (b) um $z = 0$ im Kreisring $1 < |z| < 2$.

   Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung kombiniert mit der geometrischen Reihe könnte hier hilfreich sein.

3. **Halbunendlicher Plattenkondensator** (6)

   In der Vorlesung haben Sie die Berechnung des Potentials eines Plattenkondensators mit zwei metallischen Platten bei $x_1 = \pm\pi$, $x_2 \geq 1$ und x_3 beliebig kennengelernt. (Die Platten sind unendlich ausgedehnt entlang der 3. Koordinatenachse und in positiver Richtung der 2. Koordinatenachse.)

   Wir vergessen die 3. Koordinate und nennen nun $x := x_1$, $y := x_2$ und $z := x + \mathrm{i}y$. Das Potential $u(z)$ zu dem beschriebenen Kondensator, mit der Randbedingung $u = \pm\pi$ auf den metallenen Platten, ergibt sich aus der holomorphen Funktion $f(z)$, die implizit durch
   $$\mathrm{i}\,z = \mathrm{i}\,f(z) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,f(z)}\,, \tag{1}$$
   definiert ist.

   (a) Warum ist (1) eine explizite Lösung? Oder anders gefragt: Welche alternativen Lösungen kennen Sie und welche ist am rechenunaufwendigsten?
   (b) Welche Bedeutung hat der Imaginärteil von $f(z)$?
   (c) Plotte die influenzierte Ladungsdichte auf den Plattenoberflächen innen und außen. Die Asymptotik der Ladungsdichte fern des Plattenrandes ist innen 1 und außen 0. Die Gesamtladung auf einem Streifen mit $x_1 = \pi, x_2 \in [1, \infty[, x_3 \in [0, l]$ auf der äußeren Oberfläche ist dennoch unendlich.